Revenir au sens de la notion de limite par certaines de ses raisons d'être : un chantier pour le début de l'analyse à l'université

Marc Rogalski

Laboratoire de Didactique André Revuz, Université Paris-Diderot ; Laboratoire Paul Painlevé, Université des Sciences et Technologies de Lille et CNRS ; Institut Mathématique de Jussieu-Paris Rive Gauche, Université Pierre et Marie Curie et CNRS, marc.rogalski@imj-prg.fr

Résumé : *Nous proposons une réflexion épistémologique sur la notion de limite articulant trois dimensions : l'approximation d'un nombre, la formalisation, des aspects « méta » du début de l'analyse. A partir de ces choix nous proposons, selon diverses possibilités, de coordonner un ensemble de situations didactiques permettant d'aborder les notions de limite avec les étudiants.*

Abstract: *We propose an epistemological thought about the concept of limit along three points of view: approximation of numbers, formalisation, « meta » viewpoints at the begining of analysis. Then we present various possibilities for coordinating didactical situations intended to provoke students' work on the notion of limit.*

Keywords: limits, approximations, formalisation, meta, universitary level.

INTRODUCTION

Les problèmes didactiques de l'analyse enseignée à l'université ont donné lieu à plusieurs travaux, depuis les années 1980. Outre les analyses figurant dans (Cornu 1983) et (Sierpinska 1985) concernant les « obstacles épistémologiques » propres au concept de limite, le travail fondamental de (Robert 1982) dégageait les diverses conceptions de la notion de limite qu'on trouve chez les étudiants, et leurs efficacités différentielles pour la résolution de problèmes dans le domaine.

Depuis, de nombreuses publications se sont centrées sur les difficultés d'accès des étudiants à la logique mobilisée pour formaliser l'idée de limite, voir par exemple (Grenier-Boley et al. 2015, Litim, Zaki et Benbachir 2015, Mamona-Downs 2001). Certaines de ces approches insistent sur la nécessité de cette formalisation pour *prouver* des assertions ressenties par les étudiants comme « évidentes » mais résistantes. On peut citer à ce propos les scénarios proposés dans (Robert 1983), (Robinet 1983), (Lecorre 2015), (Rogalski 2015). Pour les deux premiers, on peut voir dans (Grenier-Bolley et al. 2015) des reprises récentes, ainsi que la présentation dans (Bridoux 2015).

D'autres présentations récentes comme celles de (Bloch 2000) ou (Rogalski 2015) insistent plus sur l'idée d'approcher la limite à un ordre donné. Dans cette optique on peut aussi s'inspirer de travaux de l'approche (Hauchart et Schneider 1996). Notre objectif est de se situer dans une perspective plus vaste s'appuyant sur un retour aux « *raisons d'être* » de la notion de limite et non plus sur un enseignement fondé sur la définition formalisée. A partir de réflexions épistémologiques, nous essaierons de voir comment il pourrait être possible d'articuler plusieurs situations qui dégageraient une notion de limite dont les composantes logiques et heuristiques deviendraient *nécessaires* et *naturelles* pour les étudiants eux-mêmes. Nous visons donc une reformulation de l'organisation mathématique du champ conceptuel de la notion de limite.

I. UNE RÉFLEXION ÉPISTÉMOLOGIQUE ARTICULÉE SELON TROIS DIMENSIONS

Nous proposons de dégager trois dimensions qui peuvent nourrir chez les étudiants la conceptualisation de la notion de limite : l'approximation, la formalisation, le rôle des « approches méta » autour de la convergence et des débuts de l'analyse.

I.1. L'approximation des nombres définis par des limites

Plusieurs aspects apparaissent ici comme complémentaires.

• La mesure des grandeurs et la construction de *nombres réels par la mesure*.

• La construction de *nombres réels par la résolution d'équations* $f(x) = 0$.

• *L'approximation de nombres* λ (a priori non rationnels, tels $\sqrt{2}$, π , e…) par des suites de rationnels u_n ; cette approximation appelle tout de suite deux idées fondamentales :

(a) l'objectif de *se fixer a priori un ordre d'approximation* de λ aussi bon qu'on le veuille, ou qu'on en ait besoin (trouver 6 décimales de $\sqrt{2}$, par exemple…) ;

(b) *le choix du terme de la suite (son numéro n) pour que l'approximation à l'ordre souhaité soit réalisée*, lorsqu'on a une suite « naturelle » (trouver des entiers n permettant d'approcher $\sqrt{2}$ à 10^{-6} près par le terme u_n de la suite de Héron) .

Ces trois approches amènent naturellement à poser la question de la construction, de l'existence, de l'unicité et des propriétés de l'ensemble des nombres réels.

I.2. La formalisation du concept de limite

Nous pensons qu'il faut dégager à ce propos deux *raisons d'être* d'une telle formalisation, pour leur nécessité et leur efficacité.

• La réponse aux deux questions concernant l'approximation.

(a) D'une part *on se fixe* un ordre d'approximation arbitraire, noté ε, du nombre λ avec donc comme *but* de réaliser l'inégalité $|u_n - \lambda| < \varepsilon$ (et on peut le faire choisir par les étudiants sur des exemples du I.1.).

(b) De l'autre *le choix de n* : les étudiants peuvent, d'abord sur des exemples, voir que si l'on cherche à approcher un nombre *irrationnel* λ par une suite de *rationnels*, alors si l'on cherche des ordres d'approximation de plus en plus précis, ce ne pourra être que *pour des n de plus en plus grands*. De plus certains exemples à travailler par les étudiants montrent qu'il faut distinguer entre « des n de plus en plus grands » (mais difficiles sinon impossibles à déterminer : cas des valeurs d'adhérences) et « tous les n à partir d'un certain rang N » (cas de la limite, où on peut souvent dans la pratique déterminer un tel N), avec de plus la difficulté qu'on pourrait dans le premier cas approcher plusieurs nombres différents à la fois.

• L'efficacité de la formalisation classique, issue *nécessairement* du premier point, se voit dès que l'on veut avec cette notion de limite entrer dans des problèmes d'analyse et faire des preuves, à commencer celle de l'unicité de la limite (impossible dans la formulation « des n de plus en plus grands »), ou des premiers résultats de l'analyse.

I.3. Le rôle des aspects « méta » mobilisés dans les débuts de l'analyse

Il s'agit là de voir comment l'usage du concept de limite dans les débuts de l'analyse met en œuvre des démarches nouvelles. Pour ce faire, nous proposons d'avoir en vue (en perspective plus ou moins proche) *un certain degré d'expertise* des étudiants, car l'opérationnalité des savoirs sur la limite est nécessaire à leur compréhension. Cela demande certaines démarches « méta ». Nous entendons par ce terme l'organisation, dans l'enseignement, à la fois d'un discours des enseignants et l'utilisation de situations, aptes à faire comprendre aux étudiants l'origine et les buts de l'introduction de certains concepts, et les modalités de leur fonctionnement, voir (Robert et Robinet 1996). En voici des exemples pour l'usage de la convergence en analyse (voir aussi II.2.).

(a) Un prototype d'approche « statique » d'une recherche de limite : « *soit* $\varepsilon > 0$ (l'ordre d'approximation choisi), *je veux réaliser l'inégalité* $|u_n - \lambda| < \varepsilon$, *pour cela je cherche une condition suffisante* sur n… ».

(b) *Le raisonnement à ε près*, fondé sur un critère d'égalité entre nombres par la petitesse arbitraire de leur écart, et avec l'analogue pour les inégalités. La première occurrence en est l'unicité de la limite, mais certains énoncés de base de l'analyse se démontrent ainsi (voir II.3.A). La nécessité de ce fonctionnement provient de ce que les limites sont rarement explicites.

(c) La méthode de *découpage de* ε et le sens du quantificateur ∀ dans la limite.

(d) Le caractère opératoire des aspects « méta » de la notion de limite, et l'intérêt de souvent revenir au sens du ε -N sans se limiter à des énoncés de limite automatique.

II. DES PROPOSITIONS DE MISE EN ŒUVRE ARTICULANT DES SITUATIONS POSSIBLES

Nous proposons des exemples de situations pour les trois dimensions que nous avons repérées, en essayant de les coordonner.

II.1. Quelques situations d'approximations de nombres définis comme mesures de grandeurs ou solutions d'équations

Nous reprenons ici quelques exemples classiques. Le but est de faire une sorte de raccourci, au niveau universitaire, de la démarche présentée dans (Hauchart et Schneider 1996).

II.1.A. *Approximation du périmètre du cercle unité*

On a noté 2π le périmètre (dont l'existence provient d'une intuition géométrique) du cercle unité. Notant a_n la longueur du côté du polygone régulier P_n à 2^n côtés, inscrit dans le cercle unité, avec $a_2 = \sqrt{2}$, on fait calculer aux étudiants l'expression de a_{n+1} en fonction de a_n. Ils en déduisent une relation de récurrence entre les périmètres de P_n et P_{n+1}, qu'on fait exploiter numériquement pour montrer des approximations de 2π. On peut alors énoncer l'irrationalité de π, en renvoyant à plus tard une preuve classique. On peut aussi dans cette partie utiliser les polygones circonscrits, et aussi étudier l'aire du disque unité, voir (Rogalski 2001, ch. 3).

II.1.B. *Retour et prolongements sur √2*

C'est encore l'occasion de jouer sur le changement de cadres, entre géométrie : diagonale du carré, et algèbre/analyse : résolution de l'équation $x^2 = 2$. Cette dernière peut donner plusieurs preuves classiques de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ (son existence allant de soi au début), mais la preuve géométrique est aussi instructive. On peut mettre en œuvre un algorithme de dichotomie, ou mieux de « décatomie », pour faire apparaître un grand nombre de décimales successives de $\sqrt{2}$.

Le changement de cadre amène les étudiants à transformer peu à peu un rectangle de base 1 et hauteur 2 en des rectangles successifs de même aire 2 mais se rapprochant de plus en plus d'un carré, de côté nécessairement $\sqrt{2}$. L'idée est de transporter la moitié de l'aire en excédent par rapport au carré de côté 1, de manière à construire un rectangle d'aire 2, de hauteur plus petite que 2 et de base plus grande que 1, donc plus proche d'un carré : un rectangle de hauteur 3/2 et de base 4/3. On peut alors dévoluer aux étudiants la tâche de recommencer la même opération sur ce nouveau rectangle, etc, et construire ainsi une suite de rectangles de plus en plus proches d'un carré, et ayant toujours une aire égale à 2. On renvoie au cadre numérique l'approximation obtenue dans le cadre géométrique, sous la forme d'une suite de nombres rationnels : $u_0 = 2$, $u_{n+1} = (1/2)(u_n + 2/u_n)$. C'est la méthode de Héron pour approcher $\sqrt{2}$. On peut alors faire évaluer aux étudiants une « vitesse de convergence quadratique » de la suite de Héron, pour qu'ils voient que « le nombre de décimales exactes double à chaque itération ».

On peut aussi faire montrer par les étudiants que pour tout rationnel positif p/q (approchant $\sqrt{2}$) on a $|p/q-\sqrt{2}| \geq 1/(6q^2)$: une mesure de la difficulté à approcher $\sqrt{2}$ par des rationnels.

Enfin, pour une autre suite intéressante convergeant vers $\sqrt{2}$, voir (Ghedamsi 2008).

II.1.C. *L'aire de la spirale d'Archimède par encadrement*

On se propose de calculer l'aire S intérieure à la courbe d'équation en coordonnées polaires $\rho = c\theta$, où c est une longueur et où $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Comme le montre un dessin, on peut découper l'intervalle de variation de l'angle $[0, 2\pi]$ en n parties égales par les points $\theta_k = 2k\pi/n$, $0 \leq k \leq n$. On encadre alors l'aire du morceau de spirale entre θ_k et θ_{k+1} par les aires des deux secteurs de cercles de rayons $c2k\pi/n$ et $c2(k+1)\,\pi/n$ et de même angle $2\pi/n$. On somme, et on demande aux étudiants de majorer en valeur absolue l'écart entre S et $4c^2\pi^3/3$: ils obtiennent comme majorant $4c^2\pi^3/n$. La discussion sur la valeur possible de S peut faire apparaître l'idée que $4c^2\pi^3/n$ *peut être rendu aussi petit qu'on veut par n assez grand,* et qu'ainsi on a l'égalité $S = 4c^2\pi^3/3$. On a là un premier *raisonnement à* ε *près* : pour tout $\varepsilon > 0$ on a l'inégalité $|S - 4c^2\pi^3/3| < \varepsilon$, car $4c^2\pi^3/n < \varepsilon$ si n est assez grand. Pour d'autres exemples classiques de mesure de grandeurs, voir (Hauchart et Schneider 1996, Rogalski et al. 2001, ch. 7).

II.1.D. *Quelques propriétés d'approximations du nombre e*

On peut partir de la suite $u_n = 1+1/1!+1/2!+1/3!+\ldots +1/n!$, faire montrer qu'elle est majorée et que la suite $v_n = u_n +1/(n.n!)$ est décroissante, et les étudiants étant persuadés à ce point de l'existence du nombre e situé entre les deux suites et approché par elles, pointer la non évidence de ce résultat admis, en renvoyant au II.1.E. On peut alors faire montrer que e est irrationnel, ce qui renforce la nécessité d'une preuve d'existence (en fait d'une construction puis d'une preuve).

II.1.E. *Construire les nombres réels*

A ce point, il faut choisir de faire apparaître chez les étudiants *une demande forte de clarification de ce que sont les nombres réels, et de leurs propriétés*. Cela peut se faire de deux façons. D'une part, par un ensemble d'activités de discussion avec les étudiants sur des exercices mettant en évidence pour eux à quel point ils ont des conceptions floues et souvent contradictoires sur la question ; on peut pour cela se reporter aux activités développées avec les étudiants à l'université de Lille dans les années 1984-1996, et qu'on trouvera dans (CI2U 1990, p. 163-170). D'autre part, des activités montrant la nécessité de l'existence de la borne supérieure ou du théorème des intervalles emboîtés pour prouver des résultats (souvent géométriques) intuitifs. On peut proposer au moins trois exemples : le théorème des valeurs intermédiaires par dichotomie (avec l'idée à ce moment « naïve » de continuité) ; l'activité présentée dans (Rogalski et al. 2001, ch.3) pour déterminer la limite de $(\sin x)/x$ quand $x \to 0$; l'approche du nombre e évoquée ci-dessus.

Nous proposons alors de répondre au besoin de clarification sur les nombres et à la nécessité de leur "complétude" par une ébauche de construction, par les développements décimaux illimités, comme dans (Rogalski et al. 2001, Annexe 3), dans l'esprit de (CI2U 1990, p. 163-170).

II.2. Un exemple emblématique pour la formalisation de la convergence

Nous proposons l'étude de la suite $u_n = 2\cos n$, essentiellement par voie numérique (une étude théorique prouvant le résultat conjecturé par informatique peut être renvoyée à plus tard). Il s'agit de se convaincre numériquement de la propriété fondamentale de cette suite :

Propriété A. *Soit* λ *un nombre quelconque de* [-2,+2]. *Etant donné un nombre* $\varepsilon > 0$ *donné, arbitraire (l'ordre d'approximation choisi pour* λ*), on peut trouver des entiers n aussi grands qu'on veut tels qu'on ait* $|u_n - \lambda| < \varepsilon$.

Les tests numériques[1] montrent deux choses : d'une part, on peut ainsi approcher $\lambda = \sqrt{2}$, mais aussi $\lambda = \sqrt{3}$, par exemple (et bien d'autres !) ; d'autre part, on est incapable de prévoir pour quels entiers n on pourrait ainsi approcher $\sqrt{2}$, et si on augmente n, c'est de $\sqrt{3}$ (ou d'un autre nombre de [-2, +2]) qu'on pourrait s'approcher ! La suite $u_n = 2\cos n$, quoique permettant d'approcher $\sqrt{2}$, est ainsi très malcommode pour cet objectif . On veut donc lui préférer une suite telle celle de Héron définie (en 11.1.B .) par $v_0 = 2$, $v_{n+1} = (1/2)(v_n + 2/v_n)$; comme nous l'avons vu, elle vérifie la propriété suivante :

Propriété B. *Etant donné un nombre* $\varepsilon > 0$ *donné, arbitraire (l'ordre d'approxi mation choisi de* $\sqrt{2}$*), on peut trouver* N *tel que pour tout entier* $n \geq N$ *on ait bien* $|v_n - \sqrt{2}| < \varepsilon$. *De plus, seul le nombre* $\sqrt{2}$ *peut être approché de cette façon par cette suite.*

De plus, les inégalités que nous avons vues sur la suite v_n nous permettent effectivement de trouver un nombre N (dépendant de ε) permettant cette approximation de $\sqrt{2}$ à un ordre fixé $\varepsilon > 0$. L'unicité du nombre que peut ainsi approcher cette suite à des ordres arbitrairement petits est conséquence d'*un raisonnement à* ε *près* : si α et β sont deux tels nombres, et $\varepsilon > 0$, on peut approcher le premier à ε près par *tous* les entiers supérieurs à N_1, et le deuxième par *tous* les entiers supérieurs à N_2, donc si on a $n \geq \max(N_1, N_2)$, on a $|v_n - \alpha| < \varepsilon$ et $|v_n - \beta| < \varepsilon$, donc $|\alpha - \beta| < 2\varepsilon$. Comme l'ordre de proximité de α et β est ainsi arbitrairement petit, ceux-ci sont égaux. Les étudiants peuvent voir que c'est le fait que les inégalités sont vraies *pour tous les entiers n assez grands* qui assure ainsi l'égalité $\alpha = \beta$, ce qui ne serait plus vrai avec la propriété A.

Les étudiants sont ainsi amenés à *avoir de bonnes raisons pour choisir ce que va être la définition formelle finalement retenue pour le concept de limite d'une suite* : **choix**

---

[1] Un programme *maple* très simple permet, pour $x \in [-2, +2]$, $\varepsilon > 0$, N et p dans $\mathbb{N}$, de déterminer les n dans $[N, N+p]$ tels que $2\cos n$ approche x à ε près. Les étudiants peuvent alors voir, par exemple, que dans la plupart des tranches de 100.000 termes consécutifs on trouve environ 4 termes de la suite qui approchent $\sqrt{2}$ à 10^{-4} près…

arbitraire d'un ordre d'approximation ε, possibilité d'approcher à cet ordre pour tous les entiers *n* suffisamment grands ($n \geq N$).

Reste alors à faire travailler les étudiants sur plusieurs aspects logiques de la définition retenue, de préférence à l'occasion de plusieurs exercices nécessitant l'un ou l'autre de ces aspects : le rôle des *quantificateurs* (ε/2, notation N_ε, rôle de $\max(N_1,N_2)$) ; le voisinage de l'infini ; le cadre graphique avec *la bande* $\mathbb{N} \times]\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon[$; l'*implication* et sa négation (écrire « v_n n'a pas γ pour limite ») ; des inégalités *suffisantes*, en général loin d'être nécessaires ; le fait de parfois exiger d'avoir déjà choisi ε assez petit, ou un premier entier N_1 assez grand ; le rapport avec la formulation : « pour *un nombre fini seulement* de valeurs de *n*, u_n n'appartient pas à l'intervalle $]\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon[$ » …

A ce point, il est essentiel de relier la propriété de la borne supérieure dans $\mathbb{R}$ et le théorème des intervalles emboîtés à des théorèmes de convergence de suites (suites monotones bornées, suites adjacentes, avec retour sur quelques exemples traités),

II.3. Des situations pour l'usage du « méta » dans les débuts de l'analyse

L'objectif est de développer chez les étudiants un certain nombre de principes d'action leur permettant de résoudre des problèmes non triviaux typiques de ce qu'on fait en analyse, et dont certains serviront de pierre de touche pour illustrer comment divers aspects de la notion de limite sont utilisés.

II.3.A. *Limite de fonction, cas de la dérivée, dichotomie*

D'abord, il semble utile d'étendre rapidement la notion de limite aux fonctions (et plutôt la limite pointée, à savoir $\lim_{x\to a,\ x\neq a} f(x)$, la seule qui corresponde aux problématiques naturelles en analyse, par exemple l'introduction de la dérivée), même si on peut en reporter l'étude détaillée à plus tard. La reprise de l'exemple de la limite de $(\sin x)/x$ en 0 ($x\neq 0$) paraît indiquée à ce point, pour montrer le rôle de la borne supérieure dans la définition nécessaire de la longueur de l'arc de cercle, comme dans (Rogalski et al. 2001, ch. 3).

La notion de dérivée étant rappelée, on peut alors montrer directement *le théorème de base sur la monotonie* : si $f'(x) > 0$ sur un intervalle, alors f y est strictement croissante (on raisonne par contraposée et dichotomie, avec une suite d'intervalles emboîtés $[a_n, b_n]$ convenables se réduisant à un point c réel[2] où la dérivée serait négative ou nulle). L'idée du raisonnement par l'absurde et de la dichotomie étant proposée par l'enseignant, les étudiants devraient se voir chargés de conclure… Le théorème sur la croissance au sens large est un corollaire facile par *un raisonnement à ε près* : si $f'(x) \geq 0$ sur $]a,b[$, la fonction $g(x) = f(x) + \varepsilon x$ vérifie $g'(x) > 0$…

II.3.B. *Des activités pour renforcer la formulation en ε-N et le raisonnement statique*

Voici quelques exercices pour mettre en valeur le « méta » du point de vue « statique » sur la convergence des suites.

(a) Le *précepte d'action* : on dit « soit $\varepsilon > 0$, on veut réaliser $|u_n - \lambda| < \varepsilon$, cherchons des inégalités suffisantes $n \geq N$… ». Applications immédiates avec les théorèmes de convergence automatique (somme, produit, etc).

(b) Un travail approfondi sur *le théorème de Césaro* : la méthode du découpage d'une somme de n termes en deux, en choisissant déjà $n > N_1$, de sorte que la somme des N_1 premiers termes soit majorée par $\varepsilon/2$, puis prendre n assez grand pour que le reste de la somme soit majoré à son tour par $\varepsilon/2$.

(c) Utiliser la méthode précédente avec la suite $\sum_{0\leq k\leq n} 1/k! - (1+1/n)^n$.

(d) *Le théorème d'encadrement à ε près* : « si $v_n \leq u_n \leq w_n$, et si $v_n \to v$ et $w_n \to w$, alors pour $\varepsilon > 0$ donné on a $v - \varepsilon < u_n < w + \varepsilon$ pour n assez grand ». C'est une version « désalgorithmisée » du théorème des gendarmes. On peut l'utiliser pour étudier $u_1 = 1$, $u_{n+1} = \sqrt{[n/(n+1)+u_n]}$ (pseudo-récurrence) : si $n \geq N$, on a $1\text{-}\varepsilon \leq n/(n+1) < 1$; on introduit les suites récurrentes encadrantes, définies pour $n \geq N$, par $v_N = u_N = w_N$, $v_{n+1} = \sqrt{[1\text{-}\varepsilon+v_n]}$ et $w_{n+1} = \sqrt{[1+w_n]}$; leurs limites sont évidentes, et on applique le théorème d'encadrement à ε près, en jouant sur le quantificateur universel.

II.3.C. *Vers l'expertise : enseigner une méthode d'étude de suites numériques*

Nous préconisons alors d'augmenter le degré d'expertise des étudiants en enseignant explicitement une méthode d'étude de la convergence éventuelle de suites numériques. Une telle méthode a pour but de rendre effectivement opérationnels les savoirs sur la convergence, en permettant ainsi d'étudier des problèmes plus difficiles, et donc d'améliorer, pour les étudiants, le sens de ces savoirs. Nous renvoyons à (Rogalski et Rogalski 2015) et à (Rogalski 1990).

III. QUELQUES QUESTIONS DIDACTIQUES

Nous avons présenté ci-dessus un schéma d'*organisation mathématique* apte, pensons-nous, à faire comprendre par des étudiants de première année d'université des *raisons d'être* de la notion de convergence, en particulier celles de la formalisation de cette notion et de son sens logique. Nous pensons ainsi que l'aspect formalisateur, unificateur et généralisateur (FUG) entraîné par l'enseignement traditionnel, partant directement de la version formelle peu motivée de la notion de

---

[2] L'exemple de la fonction définie sur Q par $f(x) = x1_{]-\infty,\sqrt{2}[}(x) + (x-1)1_{]\sqrt{2},+\infty[}(x)$ montre qu'une fonction sur Q peut être dérivable de dérivée 1 sans être croissante, car Q ne possède pas le théorème des valeurs intermédiaires.

limite, pourrait être dans une large mesure évité. Il nous semble que les ingénieries présentées dans (Robert 1983), (Lecorre 2015), (Grenier-Boley et al. 2015), (Rogalski 2015) qui ont pour but de faire « demander par les étudiants » une formalisation de la notion de convergence, et peuvent donc faciliter sa présentation, sont cependant loin d'en épuiser les raisons d'être.

Reste maintenant à présenter des scénarios didactiques précis pour les différentes étapes de l'organisation proposée. Il s'agit là d'un travail futur d'envergure. Néanmoins, certaines de ces étapes ont déjà été travaillées dans des situations d'enseignement. L'un des points principaux que l'on peut dégager de ces expériences (parfois difficiles à évaluer car insérées dans des projets globaux longs d'améliorer une année entière d'enseignement, avec la présence de multiples paramètres dont il est souvent délicat de différencier les influences) est le rôle important à faire jouer aux « ateliers » ou « travail en petits groupes » tel qu'il est décrit dans (Robert et Tenaud 1989) et (CI2U 1990 p. 49-55), ou à des activités de « débat scientifique » tel que proposé dans (Legrand 1993). Pour ce qui est de l'enseignement d'une méthode d'étude de suites numériques, des détails sont présentés dans (Rogalski et Rogalski 2015). Sur les questions de mesure de grandeurs classiques, on peut trouver des indications didactiques dans (Hauchart et Schneider 1996).

Ces scénarios et leurs articulations mériteraient d'être testés sous la forme d'une ingénierie longue couvrant une grande partie du programme d'analyse d'une première année d'université (niveau L1).

BIBLIOGRAPHIE

Bloch I. (2000) *Une situation d'introduction à la notion de limite en première scientifique : le flocon de Von Koch*. Dans I. Bloch : : *L'enseignement de l'analyse à la charnière lycée/université : savoirs, connaissances et conditions relatives à la validation*. Thèse de doctorat, Université Bordeaux 1.

Bridoux S. (2015) Introduire la notion de convergence avec une ingénierie des années 1980 : rêve ou réalité didactique ? *A paraître.*

CI2U (1990) *Enseigner autrement les mathématiques en DEUG A première année* Commission Inter-IREM Université, Lyon, Paris : IREM Université Paris-Diderot.

Cornu B. (1983) *Apprentissage de la notion de limite : conceptions et obstacles*. Publications de l'Université Joseph Fourier de Grenoble.

Ghedamsi I. (2008) *Enseignement du début de l'analyse réelle à l'entrée à l'université : articuler contrôles pragmatiques et formel…*. Thèse d'Université.

Grenier-Boley N. et *al*. (2015) Introduction aux concepts de limite de fonction et de suite en première année d'université : adaptation de deux ingénieries. *GT7 de EMF2015*.

Hauchart C. et Schneider M. (1996) Une approche heuristique de l'analyse. Repères-Irem, n° 25, p. 35-62.

Lecorre T. (2015), Définir : une nécessité à construire. Le cas de la définition de la limite d'une fonction. *Repères Irem*, 100, p. 51-64.

Legrand M. (1993) Débat scientifique en cours de mathématiques et spécificité de l'analyse. *Repères Irem*, 10, p. 123-158.

Litim B., Zaki M. et Benbachir A. (2015) Difficultés conceptuelles d'étudiants de première année d'université face à la notion de convergence des suites numériques. *GT7 de EMF2015*

Mamona-Downs J. (2001) Letting the intuitive bear on the formal : a didactical approach for the understanding of the limit of a sequence. Educational Studies in Mathematics, 28, p. 259-288.

Robert A. (1982) L'acquisition de la notion de convergences des suites numériques dans l'enseignement supérieur. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 3(3), 305-341. La Pensée Sauvage, Grenoble.

Robert A. (1983) L'enseignement de la convergence des suites numériques en DEUG. *Bulletin de l'APMEP,* 340, 431-449.

Robert A. et Robinet J. (1996) Prise en compte du méta en didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 9(1), 31-70.

Robert A. et Tenaud I. (1989) Une expérience d'enseignement de la géométrie en terminale C. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 16(1), 145-176.

Robinet J. (1983) Une expérience d'ingénierie didactique sur la notion de limite de fonction. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4/3, 232-292, La Pensée Sauvage, Grenoble.

Rogalski M. (1990) Comment étudier la convergence d'une suite réelle ? Un exemple de méthode. Commission Inter-IREM Université *Enseigner autrement les mathématiques en DEUG A première année* (pp. 197-204). Lyon, Paris : IREM Université Paris-Diderot.

Rogalski M. et *al*. (2001) *Carrefours entre analyse algèbre géométrie*. Ellipses, Paris.

Rogalski M. (2015) De la notion couplée de tangente et dérivée à la notion de limite. In *Autour de la notion de limite en classe de première scientifique*, Brochure Irem n° 97, Irem de l'Université Paris-Diderot.

Rogalski J. et Rogalski M. (2015) Enseigner des méthodes pour donner aux étudiants une expertise en résolution de problèmes. Un exemple en licence. *GT7 de EMF2015*.

Sierpinska A. (1985) Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 6(1), 5-67. La Pensée Sauvage, Grenoble.