

Introduire les réels à la transition lycée-université: Questions épistémologiques et horizon didactique

Viviane Durand-Guerrier, *Laboratoire IMAG*, vdurand@math.univ-montp2.fr

Denis Tanguay, *Université du Québec à Montréal*, tanguay.denis@uqam.ca

Mots clés : nombres réels ; densité ; continuité ; complétude

PROBLÉMATIQUE

Le présent projet de recherche est né du constat que les élèves-étudiants de fin de lycée et de début d'université n'ont des connaissances que lacunaires sur les nombres réels. L'étude de Vergnac et Durand-Guerrier (2014) montre que la majorité des élèves de seconde sondés a une conception du nombre qui l'assimile à son « écriture » (cf. aussi González-Martín et al., 2014), l'écriture décimale conférant seule un véritable statut de nombre dans leur entendement. Très peu de ces élèves savent « comment définir un nombre réel », aucun ne propose une représentation à partir de la droite, les réponses les plus fréquentes étant celles qui invoquent l'intervalle $]-\infty, +\infty[$ ou des esquives plus vagues encore, telles « l'ensemble de tous les nombres ». Ces réponses à la même question sont encore majoritaires en Terminale et en licence, et la référence aux points d'une droite ne s'y manifeste que dans une proportion de 7%.

Cette étude confirme par ailleurs les constats que font les enseignants, à l'effet que la plupart des étudiants ne font pas la différence entre nombres décimal, rationnel et irrationnel, avec des réponses qui vont jusqu'à l'incohérence quand des développements décimaux infinis sont en cause (cf. aussi Bronner, 1997). Tout porte à croire que les représentations ensemblistes ou même géométriques — à partir de la droite repérée — ne suffisent pas à problématiser la différence entre le « dense » (les décimaux et les rationnels sont denses par rapport à l'ordre \leq) et le « continu » : la connaissance, même étayée d'une preuve, qu'un nombre comme $\sqrt{2}$ est *irrationnel* n'est ni liée à la notion d'incommensurabilité, ni intégrée à la conceptualisation du continu, et est en fait « vécue » dans un monde mathématique à part. Bergé (2010) a pour sa part montré que les étudiants universitaires qu'elle a sondés ont de la complétude des réels une connaissance non opérationnelle, c'est-à-dire qui ne s'appuie pas sur un ensemble de situations/problèmes que la complétude résoudrait.

Hypothèses et questions de recherche

Nous faisons l'hypothèse qu'une conceptualisation adéquate des réels est un préalable nécessaire à un abord réussi des cours d'analyse à l'université. L'idée que les ensembles denses \mathbb{D} et \mathbb{Q} puissent laisser des « interstices » sur la droite réelle est contre-intuitive, et nous faisons l'hypothèse que la continuité suggérée par le tracé de la droite cristallise l'idée d'une dichotomie entre le *discret* et le *continu* qui donne

toute la place à la *densité*, alors confondue avec la continuité. Nous nous intéressons donc à la genèse conceptuelle des réels, telle qu'elle pourrait être soutenue dans l'enseignement : doit-on envisager une forme ou une autre de reconstruction des réels en classe ? Si oui, comment selon les niveaux scolaires considérés ? À quels concepts, objets et preuves donne-t-on accès selon les approches adoptées ?

ENCADEMENT THÉORIQUE ET MÉTHODOLOGIQUE

Dans la présente affiche, nous exposerons les analyses épistémologiques et mathématiques préalables à l'élaboration des dispositifs de collecte de données, ces dispositifs étant prévus pour constituer, dans un premier temps un questionnaire destiné à des étudiants d'université, dans un second temps des situations et séquences d'enseignement à expérimenter en classe. Ces considérations mathématico-épistémologiques préalables s'inscrivent donc dans la phase d'*analyse a priori* (Artigue, 1988) d'une élaboration méthodologique encore en cours.

Le corpus principal comme contenu central de l'affiche

Nous avons ainsi repéré et examiné quatre démarches typiques, qui seront synthétisées et organisées en réseau conceptuel dans le cœur de l'affiche, dont des éléments de la problématique occuperont le côté gauche.

1. Une construction de \mathbb{R} via les *coupures*, issue du texte original de Richard Dedekind (1872), dans la version traduite et commentée par Sinaceur (2008).
2. Une construction comme ensemble des suites de Cauchy de rationnels, quotienté par la relation : $\{a_n\} \sim \{b_n\} \Leftrightarrow \{a_n - b_n\} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Initiée par Cantor, nous l'avons jugée insuffisamment achevée dans la source originale et nous reprenons plutôt les versions qu'en donnent Burril (1967) et Lelong-Ferrand & Arnaudière (1977). À partir de constructions analogues, ces deux ouvrages concluent sur la complétude de façons très distinctes. La comparaison des deux bifurcations est en soi intéressante et riche de significations, et fera l'objet d'un encart dans l'affiche.
3. Une construction qui associe les réels aux développements décimaux illimités propres (i.e. sans queue infinie de 9). Elle est examinée dans les notes d'un cours rédigées par M. Herzlich (2013), lui-même inspiré d'un manuel de D. Perrin.
4. Chez Choquet (2002) et chez Dieudonné (1963), des constructions qui s'appuient sur des théories algébriques relativement sophistiquées et tenues pour acquises, et où au moins une propriété centrale de la continuité est donnée comme axiome.

Conclusions

Il s'agit de repérer, à travers ces différentes approches, ce qu'elles privilégient comme objets, représentations et avenues de conceptualisation, comment elles articulent les éléments centraux que sont l'ordre, les développements décimaux infinis, la densité, et les 3 ou 4 théorèmes classiques équivalents où se déclinent la complétude et la continuité. L'horizon des questions que posent les transpositions (didactiques) de ces démarches en classe complètera l'affiche (en bas et à droite).

REFERENCES

- Artigue, M. (1988). Ingénierie didactique. *Recherches en didactiques des mathématiques*, Vol. 9, n°3, 281-308.
- Bergé, A. (2010). Students' perceptions of the completeness property of the set of real numbers. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, Vol. 41, n°2, 217–227.
- Bronner, A. (1997). Les rapports d'enseignants de troisième et de seconde aux objets « nombre réel » et « racine carrée ». *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 17, n°3, 55-80.
- Burriel, C. W. (1967). *Foundations of Real Numbers*. McGraw-Hill, New-York.
- Choquet, G. (2002). *Cours de Mathématiques*. Édition de notes de cours de 1962 par les Éditions Ellipses, Paris.
- Dedekind, R. (1872). *Stetigkeit und Irrationalzahlen*. Œuvres complètes III, 315-334.
- Sinaceur, H. B. (2008). *La création des nombres*. Recueil de textes de R. Dedekind introduits, traduits et annotés par H. B. Sinaceur, collection Mathesis, Librairie philosophique J. Vrin, Paris.
- Dieudonné, J. (1963). *Fondements de l'analyse moderne*. Éd. Gauthier-Villars, Paris.
- González-Martín, A., Bloch, I., Durand-Guerrier, V. & Maschietto, M. (2014). Didactic Situation and Didactical Engineering in university mathematics : cases from the study of Calculus and proof. *Research in Mathematics Education*, 16/2, 117-134.
- Herzlich, M. (2013). *Notes polycopiées du cours GLMA 202 – Concepts fondamentaux en Analyse*. Université Montpellier 2, Faculté des sciences.
- Lelong-Ferrand, J. et Arnaudiès, J.-M. (1977). *Cours de mathématiques, Tome 2, ANALYSE*. Éd. Dunod Université, Paris.
- Perrin, D. (2005). *Mathématiques d'école*. Éditions Cassini, Paris.
- Vergnac, M. et Durand-Guerrier, V. (2014). Le concept de nombre réel au lycée et en début d'université, un objet problématique. *Petit x*, n°96, 7-28.