Approfondissement du questionnement didactique autour du concept de "borne supérieure"

Faïza Chellougui

Université de Carthage, Faculté des sciences de Bizerte, Tunisie,
chellouguifaiza@yahoo.fr

Ce travail s'inscrit dans le cadre des recherches sur l'imbrication des éléments de logique dans un raisonnement mathématique dans une perspective didactique. Dans la présente communication, je présente une formalisation logique des objets et des structures qui interviennent dans la définition d'un objet sensible enseigné à l'université : la notion de borne supérieure. L'étude didactique s'appuie sur un entretien avec des étudiants autour de la notion de borne supérieure. Cette étude a fait apparaître, d'une part, des phénomènes didactiques liés à l'alternance des deux types des quantificateurs, et d'autre part des difficultés dans la mobilisation de la définition des objets et des structures qui illustrent un problème majeur dans le processus de conceptualisation.

Mots clés: quantificateur universel, quantificateur existentiel, calcul des prédicats, formalisme logique, borne supérieure.

INTRODUCTION

De nombreux travaux de recherche en didactique des mathématiques (Selden & Selden, 1995 ; Bloch, 2000 ; Dubinsky & Yparaki, 2000 ; Durand-Guerrier & Arsac, 2003 ; Chellougui, 2004 ; Durand-Guerrier, 2005) ont montré que la complexité de la structure logique des expressions mathématiques quantifiées engendre souvent des difficultés spécifiques dans la gestion et la manipulation des quantificateurs par les étudiants : difficultés d'interprétation du vocabulaire logico-mathématique ; lacunes d'ordre opératoire ; difficultés dans la manipulation des énoncés complexes à quantifications multiples. Toutefois, en accord avec Duval (1995) et Durand-Guerrier (1996), j'adopte l'hypothèse selon laquelle une majorité d'étudiants scientifiques de première année universitaire maîtrisent la plupart des raisonnements classiques faisant appel seulement aux caractères propositionnels, à savoir le Modus Ponens et le Modus Tollens.

Dans cette communication, je propose une analyse didactique en choisissant un objet enseigné à l'université, il s'agit de la notion de borne supérieure. Cette analyse permet de proposer une formalisation logique des objets et des structures qui interviennent dans la définition de l'objet borne supérieure. Je présente ensuite les résultats obtenus avec des étudiants dans une situation d'entretien.

FORMALISATION DE LA NOTION DE BORNE SUPERIEURE DANS LE CALCUL DES PREDICATS

Dans ce qui suit, je désigne par (E, $\leq$) un ensemble E muni d'une relation d'ordre total $\leq$ et par A une partie de E. Je propose une formalisation des objets et des structures mathématiques qui entrent en jeu dans la constitution du concept de borne supérieure. Je parle de propriété d'objet lorsqu'elle s'applique à un élément de E, par exemple : *être un majorant d'une partie donnée A de E*, et de propriété de structure lorsqu'elle s'applique à une partie de E, par exemple : *être une partie majorée de E*. Je propose de formaliser selon le calcul des prédicats, d'une part les propriétés des objets : *être un majorant (*resp. *minorant) de A* ; *être un plus petit élément (*resp. *plus grand élément) de A* ; *être la borne supérieure d'une partie majorée de E* ; et d'autre part, les propriétés des structures : *admettre un plus grand élément* ; *être une partie majorée de E*. Avant d'aborder cette formalisation, je commence par présenter un cheminement vers une définition de la notion de borne supérieure, en adoptant comme définition de référence celle de Schwartz (1991).

La borne supérieure, un objet mathématique complexe

Schwartz (1991) propose la définition suivante de la structure "*admet une borne supérieure*" donnée entièrement dans un langage naturel, où E désigne un ensemble totalement ordonné :

> On dit qu'une partie A de E admet une borne supérieure si l'ensemble de ses majorants admet un minimum, et ce minimum est appelé borne supérieure de la partie considérée. La borne supérieure est donc le plus petit majorant ; tout élément qui majore A majore aussi sa borne supérieure.(Schwartz 1991, p.83)

Dans cette définition interviennent les définitions de la structure "*admet un minimum*" et des deux objets "*majorant*" et "*plus petit élément*", ainsi qu'une nouvelle structure "*ensemble des majorants*". Je fais l'hypothèse que la présence de ces différents éléments est une marque de la complexité de cette notion, qui se traduira en particulier par des difficultés prévisibles de l'interprétation entre objets et structures. Autrement dit, je peux considérer que l'étude de la syntaxe logique de la définition de la notion de borne supérieure est un indicateur de complexité pour la production d'un objet répondant à cette définition.

Je propose de mettre en évidence cette complexité par le schéma suivant :

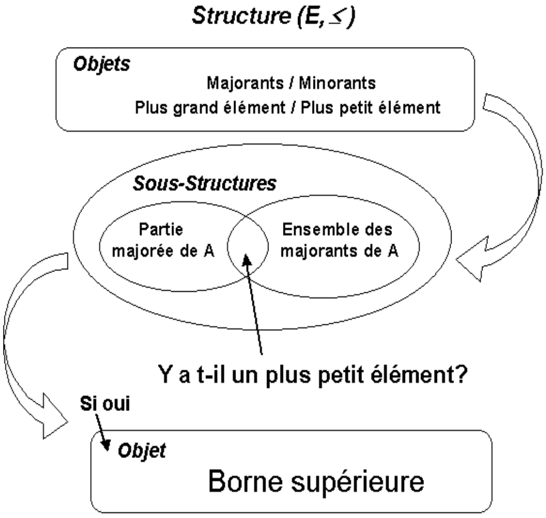

Schéma. – Complexité de la notion de borne supérieure

Ce schéma révèle une complexité de la structuration logique du fait que la définition imbrique des propriétés d'objets et de structures. Cette complexité fait émerger la nécessité d'un formalisme opératoire indiquant clairement à quoi s'appliquent les énoncés et à quel niveau on se situe.

Formalisation des objets et des structures

Objet *majorant* / *minorant*

Étant donnés un élément y de E et une partie A de E, dire que "y est un majorant de A" (resp. "y est un minorant de A") ou encore "y majore A" (resp. "y minore A") revient à définir une relation entre un objet mathématique et une structure. On définit ainsi une famille de propriétés d'objets lorsque A parcourt l'ensemble des parties de E. Je désigne cette relation par M(y,A) (resp. m(y,A)) qui s'exprime dans le calcul des prédicats par l'énoncé : " $\forall x \in A \;\; x \leq y$ " (1) (resp. " $\forall x \in A \;\; x \geq y$ " (1'))

Il s'agit d'une phrase ouverte en y et close en x. En éliminant la quantification bornée[1] dans (1), on obtient : "$\forall x\ (x \in A \Rightarrow x \leq y)$" (2) (resp. "$\forall x\ (x \in A \Rightarrow x \geq y)$" (2'))

La négation de l'énoncé (2) est donnée par l'expression suivante :

"$\exists x\ (x \in A \wedge y < x)$" (3) ;

ce qui signifie que "y n'est pas un majorant de A", d'où la formalisation de la propriété *ne pas être un majorant de A* qui correspond donc à $\neg$M(y,A).

---

[1] La quantification bornée cache l'implication, elle permet de restreindre le domaine de référence (Durand-Guerrier, 2003 ; Chellougui 2004)

Objet *plus grand élément / plus petit élément*

La propriété d'objet "y est un plus grand élément pour A" (resp. "y est un plus petit élément pour A") s'exprime dans le calcul des prédicats par l'énoncé ouvert en y, clos en x : $y \in A \wedge M(y,A)$ (4) (resp. $y \in A \wedge m(y,A)$ (4'))

Ou encore par l'énoncé : $y \in A \wedge \forall x(x \in A \Rightarrow x \leq y)$ (5) (resp. $y \in A \wedge \forall x(x \in A \Rightarrow x \geq y)$ (5'))

Dans le vocabulaire courant, cet objet est aussi désigné par l'expression "y est un maximum de A" (resp. "y est un minimum de A")

Structure *être une partie majorée*

La propriété de l'objet *élément majorant* nous permet de passer à la propriété de la structure *être une partie majorée* par l'affirmation de l'existence d'un majorant, au moins. On désigne par *M*(A) l'expression "A est majorée" qui s'exprime dans le calcul des prédicats par l'énoncé : "$\exists y \ \forall x \ (x \in A \Rightarrow x \leq y)$" (6)

Il s'agit ici d'une phrase close en y et en x, qui permet de définir une propriété de A au moyen d'un prédicat *M* sur l'ensemble des parties de E.

Structure *admettre un plus grand élément / un plus petit élément*

Cette propriété permet de définir, dans le calcul des prédicats, la propriété de structure : A *admet un plus grand élément* (resp. A *admet un plus petit élément*) :

"$\exists y \ [y \in A \wedge \ \forall x(x \in A \Rightarrow x \leq y)]$" (7) (resp. "$\exists y \ [y \in A \wedge \ \forall x(x \in A \Rightarrow x \geq y)]$" (7'))

Ce qui signifie qu'on peut trouver un élément y qui remplit les conditions suivantes :

y élément de A et y élément majorant de A (resp. élément minorant de A).

Formalisation de l'objet borne supérieure

En me référant à Schwartz (1991), je reformule la définition de borne supérieure de la manière suivante : "Pour tout élément α de E, α est appelé borne supérieure de A, noté supA, si et seulement si α est un majorant de A et α est le plus petit des majorants" ou encore : "Pour tout élément α de E, α est appelé borne supérieure de A, noté supA, si et seulement si α est un majorant de A et pour tout élément y de E inférieur à α, y n'est pas un majorant de A"

Dans le calcul des prédicats la relation "α=supA" s'exprime par l'énoncé suivant :

" $[\forall x(x \in A \Rightarrow x \leq \alpha)] \wedge \forall y[(y < \alpha \Rightarrow \exists x \ (x \in A \wedge y < x)]$ " (8)

Selon l'usage en mathématique, on le donnera sous la forme de deux énoncés coordonnés : " 1) $\forall x \ (x \in A \Rightarrow x \leq \alpha)$ et 2) $\forall y \ [(y < \alpha \Rightarrow \exists x \ (x \in A \wedge y < x)]$ " (9)

Je peux noter ici, que le premier énoncé 1) exprime : "α est un majorant de A" et le deuxième énoncé 2) exprime : "Pour tout élément y de E inférieur à α, y n'est pas un majorant de A". Cette reformulation permet de ne pas introduire dans le formalisme logique l'ensemble des majorants ; on coordonne ainsi deux relations entre un objet et une structure. La caractérisation de la borne supérieure, dans l'ensemble IR des nombres réels, est fréquemment formulée de la manière suivante :

"Pour toute partie A de IR, si A est majorée et si l'ensemble des majorants de A admet un minimum, alors il existe un élément unique α de E vérifiant les deux propriétés suivantes : 1') $\forall x\ (x \in A \Rightarrow x \leq \alpha)$ et 2') $\forall \varepsilon > 0\ \exists x\ (x \in A \wedge \alpha - \varepsilon < x)$ " (10)

Cette caractérisation est une reformulation de l'expression (9) en utilisant dans l'énoncé 2) l'équivalence "$\alpha > y \Leftrightarrow \alpha - y > 0$" et en remplaçant "$\alpha - y$" par "$\varepsilon$".

RESULTATS DES ENTRETIENS AVEC LES ETUDIANTS

L'analyse logique présentée auparavant va nous servir de référence pour analyser les réponses de six binômes d'étudiants de première année[2], de la section Mathématiques-Informatique de la faculté des sciences de Bizerte au premier semestre de 2002/2003, dans une situation de résolution d'exercices. La manière dont les étudiants s'approprient la notion de borne supérieure constitue la question centrale de cette expérimentation qui s'est déroulée suivant un questionnaire et un entretien. Ce dernier a fait apparaître plusieurs phénomènes dont nous présentons les plus importants.

« Etrange définition » d'un objet majorant

A la question « quelle est la définition d'un majorant d'une partie A de IR ? », on peut en voir la manifestation dans la réponse formalisée, du type (AE)[3], donnée par écrit par l'étudiant ***J*** du binôme 1,: « $\forall x \in A\ \ \exists M \in IR\ \ x \leq M$ » (I)[4]

Il est possible que la réponse de ***J*** entremêle les définitions d'élément majorant et de partie majorée. Cette réponse relèverait alors d'une confusion entre propriété d'objet et propriété de structure et confirmerait notre hypothèse précédente. Si c'est le cas, ***J*** utilise un énoncé du type (AE) alors que c'est un énoncé de type (EA) qu'il a en tête.

Dans la définition formalisée du majorant M, l'étudiant ***J*** utilise un énoncé clos, alors qu'une telle définition nécessite un énoncé ouvert. Pour définir l'élément majorant M, l'étudiant introduit l'existence de M alors que la variable M ne devrait être soumise à aucune quantification.

---

[2] Les étudiants arrivant à l'université se trouvent au début de la première année en face d'activités mathématiques qui exigent une écriture quantifiée et un certain usage des éléments de logique. Alors qu'au lycée, les symboles logiques ne font pas un objet d'enseignement dans les programmes des mathématiques. Ceux-ci déconseillent explicitement l'utilisation formelle des quantificateurs (Chellougui, 2000).

[3] (AE) désigne les énoncés du type : *Pour tout…il existe...* et (EA) désigne les énoncés du type : *Il existe...pour tout…*

[4] Les formulations proposées du type (AE) sont désignées par (I) et celles du type (EA) sont désignées par (II).

On observe ainsi, un premier phénomène saillant important présent chez tous les binômes. Le tableau suivant récapitule les réponses des six binômes, formé chacun d'une étudiante et d'un étudiant, pour définir un objet majorant :

Binôme	Etudiante	Etudiant
Binôme1	***2.J*** : Soit M un majorant de E, quel que soit x appartenant à l'ensemble E, il existe M appartenant à IR, tel que x est inférieur ou égal à M. M est un majorant, puisque M appartient à IR, tout élément appartenant à IR et supérieur à M est un majorant. J écrit : « $\forall x \in E$, $\exists M \in IR$ / $x \leq M$ (I) »	***1.T*** : Un majorant : quel que soit M appartenant à IR, quel que soit x appartenant à E donc M est supérieur ou égal à x, M est un majorant de E. ***3.T*** : C'est la définition d'un majorant.
Binôme2	***2.C*** : Quel que soit x appartenant à A, il existe un M appartenant à IR, tel que x est inférieur ou égal à M. C écrit : $\forall x \in E$, $\exists M \in IR$ / $x \leq M$ (I) ***4.C*** : Il existe un M appartenant à IR avec quel que soit x appartenant à A on a x inférieur ou égal à M…C'est la définition d'un majorant. C note : « $\exists M \in IR$,$\forall x \in E$, $x \leq M$ (II) »	***1.K*** : C'est le plus grand élément. ***3.K*** : M s'appelle un majorant de A
Binôme3	***F*** : Quel que soit x appartenant à A, il existe un réel b tel que x est inférieur ou égal à b. On dit que b est un majorant de A. F écrit : $\forall x \in A$, $\exists b \in E$; tel que $x \leq b$ (I)	

Binôme4	***N*** : Quel que soit x appartenant à A, il existe un réel M tel que x est inférieur ou égal à M. On dit que M est un majorant de A. N écrit : « $\forall x \in A, \exists M \in IR$; tel que $x \leq M$ (I) »	
Binôme5	***2.M*** : Quel que soit x appartenant à A, il existe y appartenant à IR., tel que ; x inférieur ou égal à y : y est un majorant de A. M écrit : $\forall x \in A, \exists y \in IR$; tel que $x \leq y$ (I)	***1.B*** : On a A inclus dans IR., quel que soit x appartient à A, on a x inférieur ou égal à y ; y c'est un élément qui appartient à IR.. Donc y majore l'ensemble A. ***3.B*** : Oui, c'est ça.
Binôme6	***2.S*** : C'est il existe M un majorant, tel que quel que soit x appartenant à A tel que x est inférieur au majorant M. S note : « $\exists M \in IR, \forall x \in A, x \leq M$ (II) » ***4.S*** : C'est la définition d'un majorant.	***1.A*** : Majorant [Long silence] ***3.A*** : C'est la définition de borne supérieure ?

Tableau : Tableau récapitulatif des réponses des six binômes

Difficultés dans la mobilisation de la définition

Le deuxième phénomène important concerne l'apparition de difficultés dans la mobilisation de la définition. Après la proposition de l'énoncé (AE) par les étudiants, je suis intervenue en proposant l'énoncé (EA) correspondant :

$\exists M \in IR \quad \forall x \in A \quad x \leq M$ (II) (EA)

J'illustre ce phénomène par une séquence de la transcription du binôme choisi :

1.J : Dans (I), quel que soit x appartenant à A.

2.T : Oui, on peut utiliser (I).

3.J : Non, non, quel que soit x appartenant à A, il existe M appartenant à IR .

4.T : Oui, les deux sont justes. Il existe M appartenant à IR, quel que soit x appartenant à A, x inférieur à M. L'écriture mathématique est différente.

Il y a une différence d'interprétation des définitions pour caractériser un majorant :

- pour l'étudiant ***J***, il y a un rejet de l'énoncé (EA) et un choix de l'énoncé (AE).

- pour l'étudiant *T*, les deux énoncés (AE) et (EA) gardent le même sens bien qu'il y ait une certaine différence dans l'ordre de l'écriture des deux quantificateurs.

A la suite de cette séquence, j'ai proposé de décrire graphiquement la situation sur une droite réelle, et également de déterminer un contre-exemple qui contredit le fait que M soit un majorant de A. En utilisant cette représentation graphique, j'ai voulu montrer au binôme, d'une part la dépendance entre M et x dans un tel énoncé (AE), et d'autre part le fait que cet énoncé ne traduit pas que A est une partie majorée. Les étudiants ont répondu à cette intervention de la manière suivante :

5.J : Il existe M, on a dit il existe………… Il existe ici.

(J indique un point extérieur à A qui est effectivement un majorant)

6.T : On peut dire que M n'appartient pas à A.

L'étudiant ***J*** veut introduire l'objet M à l'extérieur de A : « …il existe ici… », puisque M existe, donc il est introduit. L'étudiant ***T*** rejette le schéma, en ajoutant une condition sur l'objet M « M n'appartient pas à A ».

A partir de ces deux interventions, je fais l'hypothèse que les étudiants ne se sont focalisés ni sur l'objet M ni sur toute la structure de l'ensemble A. Il n'y a eu de réaction ni sur la dépendance entre x et M ni sur la structure de A. Par contre, il y a une réfutation de l'objection introduite qui conduit à modifier la définition. Plus loin, l'étudiant J affirme :

7.J : Dans (I) M peut être un majorant.

Cette affirmation est correcte ; cependant l'énoncé (I) ne joue évidemment pas son rôle de définition. En effet, la formulation proposée dans l'énoncé (I) permet d'introduire un objet, qui peut être ou non un majorant de la partie considérée.

Il y a deux interprétations possibles : ***J*** veut dire que ce point M placé satisfait (I), ou bien, dans le cas où la partie est majorée, on peut choisir M de sorte qu'il vérifie :

$\forall x \in A \quad x \leq M \quad$ (II')

On voit ici les difficultés à manipuler les définitions et les propriétés : ceci renvoie à savoir ce qu'est une définition.

Principaux résultats

La nature de nos analyses reflète sans doute notre perplexité devant les résultats obtenus. En effet, les réponses que certains étudiants ont pu nous donner dépassaient souvent ce que nous pouvions imaginer. Ces réponses ont montré qu'il y a une imbrication entre le vocabulaire, les notations et les concepts, en particulier les relations entre élément et partie.

L'acceptation, par la quasi totalité des étudiants, d'une « définition » ambiguë d'un objet majorant a fait ressortir des phénomènes didactiques saillants qui sont liés principalement d'une part, à des difficultés dans la manipulation et dans la gestion des quantificateurs universel et existentiel, et d'autre part, à un recours aux représentations graphiques qui cachent souvent la structure complexe de la notion de borne supérieure et le jeu entre objet et structure.

CONCLUSION

Le présent travail a essentiellement porté sur le raisonnement mathématique, la question fondamentale étant le traitement de la logique opératoire dans le formalisme mathématique. L'étude de cette question permet de considérer la synthèse épistémologique comme un appui, d'une part pour analyser l'articulation entre logique et mathématique, et d'autre part pour la mise en place d'une étude empirique.

La formalisation logique complète, dans le calcul des prédicats, de la notion de borne supérieure a mis en évidence la complexité de la structure logique. Cette analyse a montré une imbrication entre les propriétés d'objets et les propriétés de structures que la pratique ordinaire concernant l'usage de la quantification en mathématiques tend à masquer (Chellougui, 2004).

L'étude mise en place, centrée sur la manière dont les étudiants définissent l'objet « être un élément majorant » et la structure « être une partie majorée », consiste à observer six binômes d'étudiants en situation de résolution d'exercices suivie d'un entretien. Les résultats didactiques obtenus confirment que la complexité de la structure logique d'un énoncé mathématique fait apparaître des phénomènes didactiques qui sont liés non seulement à des problèmes dans l'articulation des quantificateurs avec l'argument mathématique, mais aussi à des problèmes langagiers et des difficultés à manipuler les définitions et les propriétés. Ces résultats mettent en évidence des difficultés pour les étudiants à mobiliser de manière rigoureuse les énoncés quantifiés. Il s'agit principalement de la non prise en compte de l'ordre dans l'alternance des quantificateurs, de la tendance à mobiliser prioritairement les énoncés sous la forme « Pour tout… il existe... » plutôt que les énoncés « Il existe… pour tout… » et de la pratique courante selon laquelle l'affirmation de l'existence introduit l'objet.

BIBLIOGRAPHIE

Bloch, I. (2000), L'enseignement de l'analyse à la charnière lycée/université : Savoirs, connaissances et conditions relatives à la validation, Thèse de doctorat, Université Bordeaux1.

Chellougi, F. (2000), Approche didactique de la quantification dans la classe de mathématiques à la fin de l'enseignement secondaire et au début du supérieur scientifique, Mémoire de DEA de didactique des mathématiques, Institut Supérieur de l'Education et de la Formation Continue, Université de Tunis.

Chellougi, F. (2004), L'utilisation des quantificateurs universel et existentiel en première année d'université, entre l'explicite et l'implicite, Thèse de doctorat en co-tutelle entre Lyon et Tunis, Soutenue à l'Université Claude Bernard Lyon1

Dubinsky, E. & Yiparaki, O. (2000), On student understanding of AE and EA quantification, Research in Collegiate Mathematics Education IV, CBMS Issues in Mathematics Education, 8, pp.239-289. American Mathematical Society: Providence.

Durand-Guerrier, V. (1996), Logique et raisonnement mathématique : Défense et illustration de la pertinence du calcul des prédicats pour une approche didactique des difficultés liées à l'implication, Thèse de l'Université Claude Bernard Lyon1.

Durand-Guerrier, V. & Arsac G. (2003), Méthodes de raisonnement et leurs modélisations logiques : Spécificité de l'analyse. Quelles implications didactiques ?, Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol.23, n°3, pp.295-342. La Pensée Sauvage Editions.

Durand-Guerrier, V. (2005), Apports de la théorie élémentaire des modèles pour une analyse didactique du raisonnement mathématique, Note de synthèse, Habilitation à diriger des recherches en didactique des mathématiques, Université Claude Bernard Lyon 1.

Duval, R. (1995), Sémiosis et pensée humaine ; Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels, Peter Lang, Berne.

Gentzen, G. (1935), Untersuchungen über das logische Schliessen in Math. Zeitschr, 39.

Schwartz, L. (1991), Analyse I, Théorie des ensembles et topologie, Hermann.

Selden, J. & Selden, A. (1995), Unpacking the logic of mathematical statements, in Educational Studies in Mathematics, 29, 123-151.