Entrée des étudiants dans l'Analyse formelle de début d'université : Potentialité des méthodes numériques d'approximation

Imène Ghedamsi

Université de Tunis, IPEIT, Tunisie, ighedamsi@yahoo.fr

Dans cet article, nous nous posons la question des moyens que peut se donner l'enseignement des mathématiques, à l'entrée à l'université, pour permettre aux étudiants d'accéder aux objets de base de l'analyse réelle. En se plaçant dans le cadre de la TSD, nous étudions les potentialités d'un milieu théorique fondé sur les méthodes numériques d'approximation, pour engager les étudiants dans une phase de travail expérimental leur permettant de retourner efficacement sur un système cohérent d'objets de l'analyse. Nous décrivons succinctement comment l'entrée dans un processus de preuves mixtes – pragmatiques vs formelles – a été rendu obligatoire dans le travail des étudiants, à travers l'émergence du problème général de l'existence et de l'accessibilité des nombres, des limites et des suites.

Mots-clés : existence, approximation, pragmatique, formel, milieu.

INTRODUCTION

De nombreux travaux en didactique de l'analyse soulignent les modifications majeures qui devraient accompagner le travail des étudiants à l'entrée à l'université. Ces modifications ont été modélisées dans la littérature en utilisant plusieurs angles de vues. Les travaux qui étudient le développement cognitif mettent en exergue les exigences de flexibilité requises dans le travail des étudiants : mise en œuvre de plusieurs registres de représentations sémiotiques ; mise en fonctionnement de plusieurs niveaux des connaissances (la disponibilité de ces connaissances étant le niveau habituellement exigible à l'entrée à l'université) ; transiter "efficacement" entre les dimensions intuitive (incarnée sur la base d'expérimentations nouvelles et plus anciennes), proceptuelle (dualité processus-objet) et formelle des notions de l'analyse, etc. (Praslon, 2000 ; Bloch & Ghedamsi, 2005 ; Tall & Mejia-Ramos, 2006 ; Chellougui, 2009 ; Bergé, 2010 ; Vandebrouk, 2011 ; González-Martín et al., 2011, etc.). Plusieurs de ces travaux tablent leurs analyses sur la modélisation à priori de l'organisation mathématique en jeu, en praxéologies mathématiques. L'usage de la modélisation praxéologique dans certaines études, a de plus permis de pointer essentiellement la prédominance du bloc théorique dans les praxéologies de début d'université (Bosch et al., 2004 ; Winslow, 2008 ; Diaz et al., 2008, etc.). Dans tous les cas, l'existence formellement établie des objets de l'analyse réelle est souvent invoqué pour investiguer les difficultés que pourraient engendrer, dans le travail des étudiants, ces nouvelles attentes. Le lien entre nombre réels et limite cristallise à son tour d'une manière fondamentale cette existence, et ceci qu'il s'agisse de l'existence d'une borne supérieur, d'une limite (convergence d'une suite), d'une suite (densité de Q dans R ou théorème de Bolzano-Weirestrass par exemple), d'une valeur intermédiaire, d'un point fixe, d'un nombre dérivé (théorème des accroissements finis, théorème de Rolle ou formule de Taylor par exemple) ou encore d'un infinitésimal (reste intégral ou un équivalent d'une fonction par exemple).

Par conséquent, dans une problématique de type recherche d'une progression de situations de l'analyse réelle à l'entrée à l'université, l'un des enjeux est celui de convaincre les étudiants qu'il est possible d'expliciter et de donner plus de visibilité à ces objets. L'approfondissement et la reprise du travail sur les nombres réels, ainsi que l'élargissement du champ d'expérience des étudiants relativement à la nature des nombres réels et à leur manifestation constituent donc un second enjeu incontournable d'une telle progression. Le questionnement que nous posons globalement est le suivant : Dans quelle(s) mesure(s), un travail d'investigation numérique sur nombres réels et limite permettrait-il de réintroduire d'une manière consistante du point de vue de l'apprentissage, un ensemble d'objets constitutifs de l'analyse réelle à l'entrée à l'université ? Nous plaçons d'emblée l'étude investiguant un tel questionnement dans le cadre de référence de la Théorie des Situations Didactiques (Bloch, 2002 ; González-Martín et al., 2014). La question de la recherche d'une dimension d'expérience dans le travail des étudiants est de ce fait posée d'un double point de vue : celui des composantes souhaitables pour la construction d'un milieu théorique de la progression de situations envisagée (d'un point de vue essentiellement épistémologique), ainsi que celui du rôle de la classe - y compris du professeur, conçu sur la base des différents niveaux d'un milieu expérimental a priori. Dans le cadre de ce travail, notre réflexion sera essentiellement portée sur les conditions d'élaboration des situations plutôt que sur les modalités d'expérimentation.

LES METHODES NUMERIQUES : UNE PLACE DE CHOIX DICTEE PAR LE CADRE DE REFERENCE DE LA TSD

La construction du milieu théorique de la progression envisagée stipule à un premier niveau de réintroduire des questionnements d'ordre épistémologique et/ou mathématique. Ce niveau d'étude devra permettre de définir un schéma théorique modélisant les principales caractéristiques d'une organisation de l'analyse réelle, qui prenne appui sur le lien entre nombres réels et limite afin de revisiter le réseau des objets de base l'analyse standard (Convergence de suite, densité de Q dans R, segments emboités, borne supérieure, valeur intermédiaire, accroissements finis/Rolle, point fixe, formule de Taylor).

Il est largement reconnu que l'organisation mathématique en analyse réelle telle qu'introduite à l'entrée à l'université a complètement supplanté les préoccupations épistémologiques liées à la construction des nombres réels. Or, il est aussi amplement connu que la théorie de l'analyse standard s'est stabilisée à l'issue de la construction rigoureuse de l'ensemble des réels et de la mise en place des propriétés topologiques des réels, qui constituent un fondement théorique des savoirs sur suite, limite et fonction. Par conséquent, avoir un niveau de signification suffisant des objets de base de l'analyse réelle suppose que l'on a acquit le sens de l'adage "*approcher, majorer, minorer*" (Dieudonné, 1980), et on en a établit le lien avec le formalisme que requiert l’existence des nombres réels. Finalement, la préoccupation ultime est celle de se donner les moyens d’investiguer la question ultime de Cauchy de ce qu’est un nombre réel et de ce qu’il entretient comme relations avec les objets qui fondent la base de l’analyse standard. Toutes ces considérations nous portent à choisir de ne pas évacuer le problème du numérique (et/ou de l’approximation) et de la structure de R, mais de le mettre au cœur des problèmes mathématiques et des situations qui doivent être travaillées par les étudiants.

L’évolution historique de la conception des nombres est accompagnée par la genèse et le développement des méthodes numériques d’approximation successive. A travers l’histoire, l’usage de ces méthodes a porté en germe un travail avec les objets de base de l’analyse énoncés ci-dessus ; les questions relatives aux notions de suite et fonction dérivent de l’idée d’approximation et de la nature des nombres réels/limite. Ces méthodes ont très longtemps manqué de bases solides pour la validation qui demeurait imprécise, et aucun progrès significatif ne s’est fait avant le XIX^{e} siècle, un siècle qui marque l’entrée dans l’ère de la formalisation de la notion de nombre (Dieudonné, 1978 ; Hairer & Wanner, 2000). Finalement, le recours aux méthodes numériques d’approximation permet de mettre en œuvre un système satisfaisant des objets de l’analyse, de faire apparaître sa cohérence et de rendre accessible ses objets, dont l’existence théorique n’est pas forcement "constructible". L’étude de nature épistémologique et mathématique concernant le développement de différentes méthodes d’approximations dans leur lien avec l’évolution de la conception de nombre (Ghedamsi, 2008), nous a permis de préciser un modèle théorique de situations engendrant, dans la mesure du possible, un ensemble satisfaisant de problèmes spécifiques des nombres réels dans leurs relations avec les notions de limite, suite et fonction. Parmi les caractéristiques de ce modèle, nous citons : 1) concevoir la nature des nombres (distinguer entre rationnel, irrationnel algébrique, irrationnel transcendant) ; 2) faire une hypothèse et la valider sur la possibilité de construire une suite approchant un nombre ; 3) calculer des valeurs approchées d’irrationnels (par exemple solution d’une équation non résoluble par l’usage des techniques algébriques à disposition) avec une approximation arbitrairement fixée ; 4) construire une suite convergeant vers un réel et contrôler la rapidité de la convergence (exhiber une approximation d’un réel, contrôler l’erreur dans les termes de la suite) ; 5) contrôler la validité des résultats numériques (les relier aux définitions et théorèmes déjà introduits).

La question se pose des moyens qui favoriseraient l’engagement des étudiants dans de telles situations à travers une phase expérimentale permettant : d’une part, un travail heuristique sur des objets spécifiques, avec des preuves pragmatiques et des opportunités de conjectures, de calculs, etc., et d’autre part, un retour au formalisme dans un milieu de référence (de validation) informé par le milieu objectif (et/ou d’action) précédemment visité. Dans ce qui suit, nous explicitons succinctement comment le recours aux méthodes numériques permet d’organiser de telles situations dans les conditions susmentionnées. Dans le cadre de ce travail, les méthodes qui nous sont apparues comme les plus riches en possibilités didactiques sont celles des fractions continues, introduites historiquement par Théon de Smyrne et la méthode de Newton, qui du fait de leur histoire complexe, tant au niveau des motivations intrinsèques qu'au niveau des questions futures qu'a provoqué l'usage implicite de savoirs, s'énoncent à l'origine comme pragmatiques et imprécises mais suscitant de plus en plus de rigueur. C'est en grande partie sur la densité de Q dans R, la convergence des suites, les segments emboîtés, la valeur intermédiaire, le point fixe, les accroissements finis, Rolle et la formule de Taylor, ayant historiquement manqué longtemps de base théorique précise, que se fondent ces méthodes. Nous anticipons de la part des étudiants des va et vient entre des manques théoriques restés longtemps inaperçus et la rigueur de l'édifice final tel qu'il est enseigné actuellement.

Au moins deux paramètres sont à prendre en considération afin d'introduire un milieu d'expérience des objets de l'analyse tels que nous le visons : 1) le milieu disponible pour la dévolution doit permettre la manipulation d'une variété d'ostensifs (graphiques, géométriques, numériques) de nombres, suites et fonctions. De plus, on peut s'attendre à ce qu'un registre donne lieu à une manipulation d'ostensifs d'un autre registre ; ceci sous-entend que les réponses ne devraient pas être données dans un contrat d'ostension. Les tâches d'action et de formulation sollicitées devraient amener les étudiants à questionner les savoirs institutionnels de l'analyse réelle et les exemplifier. La richesse des questions que peut susciter le problème d'approximation et les objets auxquels elles réfèrent, peut mettre les étudiants sur la voie de validation pragmatique/sémantique, déclencher leurs intuitions et les confronter (dans un milieu de référence conçu à cette fin) à des savoirs qu'ils ont reçu sans dimension d'expérience. Dans ces conditions, le milieu objectif pourrait a priori, aussi bien être un milieu graphique, géométrique ou numérique. Bien entendu, ceci n'empêche pas le fait que les étudiants pourraient recourir à des ostensifs algébriques ou analytique au cours de leurs investigations ; 2) à la suite d'investigations sur les nombres, le milieu de référence (particulièrement algébrique et analytique) est supposé mettre à défaut le recours à une application "automatique" des définitions, théorèmes et formalisme du cours. Nous attendons que les étudiants, au cours de leur contact direct avec les nombres, développent des évidences sous forme d'intuitions fondées graphiquement, géométriquement, numériquement ou autre. Nous attendons aussi qu'ils soient en mesure de conforter ces évidences en les confrontant aux objets de l'analyse visés dont l'existence a été formellement introduite, et réciproquement. Encore faut-il que le milieu de référence, censé permettre de formuler des preuves à l'aide des règles du calcul formel, puisse favoriser ce phénomène, et ce d'autant plus qu'il ne fait pas explicitement référence aux nombres et aux approximations.

La question du contrôle par les étudiants de la validité des résultats empiriques (numériques ou autres) suppose d'exhiber un objet spécifique (générique ou non) et d'attester de son existence en le reliant à l'objet général qui lui est associé. Réciproquement, l'idée est aussi de conforter et d'interroger cette existence tout en gardant le contrôle pragmatique. Par exemple, dans le cas de la notion de valeur intermédiaire, l'idée intuitive étant que toute fonction continue sur un intervalle ne peut prendre deux valeurs distinctes f(a) et f(b) sans prendre les valeurs comprises entre f(a) et f(b) (le tracé d'une fonction continue sur un intervalle ne présente pas de trous). Mais alors, cela nous aura ouvert à d'autres affirmations (ou considérations intuitives) disant, par exemple : lorsqu'une fonction continue sur un intervalle prend deux valeurs opposées, elle prend nécessairement la valeur 0 en, au moins, un point de cet intervalle. De même, si on se donne à réfléchir sur la question (appuyée par les graphiques ci- dessous), de ce qui se passe dans le cas où f est discontinue (existe-t-il t compris entre f(a) et f(b) et qui n'est image d'aucun c compris entre a et b ?).

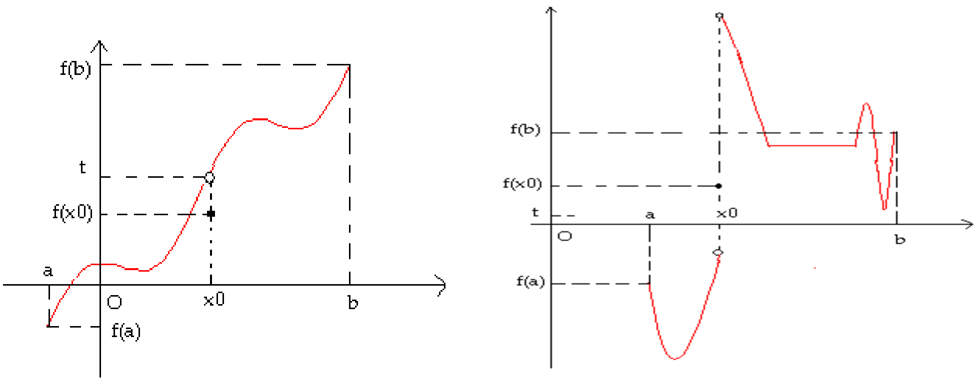

Table 1: Exemples de graphiques de fonctions

Posons- nous maintenant la question de ce qui se passe si on veut expliciter c. Cette question est légitime si on s'intéresse à la résolution de l'équation f(c) = t. Puis posons- nous la question plus générale de savoir traiter l'équation dans le cas où l'outil algébrique ne le permet plus. Ceci nous amène à la preuve du théorème des valeurs intermédiaires qui se fait à l'entrée à l'université en fonction de l'axiomatique choisie (borne supérieure, segments emboîtés, etc.). Se pose maintenant la question du rôle conceptuel de cette démonstration, en d'autres termes à quel recours supplémentaire faudrait-il faire appel pour développer d'autres idées, affiner et/ou renforcer l'intuition ? Ceci du fait par exemple, que dans le cas où t admet plus qu'un antécédent, la preuve d'existence concernera "un seul terme c", comment retrouver les autres ? Une source possible d'intuitions appropriées serait les approximations successives en l'occurrence au moyen de support graphique. Ce raisonnement s'applique aussi aux objets introduits dans le théorème des accroissements finis et le théorème de Rolle. Dans tous les cas, l'appui sur le contenu conceptuel de la densité de Q dans R permettrait d'exhiber une suite de rationnels d'approximation des objets spécifiques en jeu en traduisant la convergence de la suite vers un nombre par : quel que soit l'erreur que l'on considère, on peut toujours trouver un ordre à partir duquel tous les termes de la suite sont des valeurs approchées de ce nombre à cette erreur près.

Dans la suite, nous décrivons succinctement un exemple d'une progression de deux situations que nous avons construite et expérimentée en se fixant trois enjeux : 1) reprendre le travail sur les nombres réels, et élargir le champ d'expérience des étudiants relativement à la nature des nombres réels et à leurs manifestations de façon à ce que le savoir de base sur la structure de R devienne disponible et opérationnel ; 2) conduire les étudiants dans une phase expérimentale à un travail heuristique, permettant de développer un processus de preuves pragmatiques ; 3) amener les étudiants à saisir le lien entre expérience pragmatique et existence des objets de l'analyse réelle par le biais d'un aller/retour preuves pragmatiques/preuves formelles (pour plus de détails concernant les situations expérimentales, voir Bloch & Ghedamsi, 2010 ; Ghedamsi & Chellougui, 2013 ; González-Martín et al., 2014).

CONSTRUCTION/EXPERIMENTATION DES SITUATIONS

Les variables didactiques qui caractérisent le modèle théorique des situations sont au nombre de sept : nature du nombre (rationnel/irrationnel, algébrique, transcendant), nature de la suite, type de suite (explicite/récurrente), comportement de la suite (croissante, décroissante, etc.), types d'approximation et d'erreur, nature de l'équation en jeu, méthode d'approximation. Les valeurs données à ces variables sont conditionnées par l'objectif ultime qui concerne la problématisation par les étudiants de la nature des nombres et de leur lien avec limite et les objets de base de l'analyse formellement introduits. Par exemple concernant la variable "nature du nombre", on écarte de prime abord le cas d'un rationnel ; le choix d'un transcendant défini implicitement comme solution d'équation permet de soulever les questionnements requis. Pareillement en ce qui concerne la variable "type de suite" si l'on veut bénéficier de l'avantage que représente le fait de pouvoir visualiser le processus d'approximation ; le choix des suites récurrentes se justifie par l'accessibilité et la clarté du procédé qui permet de les représenter, et afin de ne pas négliger les conditions sur le continu, il faudrait avoir le moyen de les représenter sur la droite réelle. Il est clair que pour la variable "comportement de la suite", le prototype de suites bien faites croissantes ou décroissantes est à éliminer.

En regard de toutes les conditions auxquelles les valeurs des variables doivent être soumises, deux situations ont été retenues : 1) Antiphérèse de racine de 2, qui table sur la construction de la meilleure approximation rationnelle de $\sqrt{2}$ et, dans la mesure du possible, sa généralisation à certains irrationnels. La méthode utilisée est basée sur les fractions continues et a été introduite historiquement par Théon de Smyrne au temps d'Euclide ; 2) Point fixe de cosinus, qui prend appui sur une discussion de la qualité de l'approximation du point fixe de cosinus donnée par la méthode de dichotomie par comparaison à celle donnée par la méthode de Newton. Dans tous les cas, l'ingénierie prévue doit amener les étudiants à travailler sur la nature des nombres (rationnels, irrationnels, algébriques, transcendants), les sous-ensembles de R et l'approximation des réels non rationnels ; ceci dans la perspective plus large de revenir sur la réintroduction de la densité de Q dans R, la convergence d'une suite, la valeur intermédiaire, les segments emboîtés, les accroissements finis, le point fixe et les fonctions contractantes, la formule de Taylor.

Antiphérèse de racine de 2

La situation de l'antiphérèse vise à permettre aux étudiants de prendre appui sur le contenu conceptuel du théorème de densité de Q dans R par le biais d'instanciations appropriées, ainsi que de mettre en œuvre et revenir sur un réseau de savoirs de l'analyse réelle dont les segments emboîtés et les accroissements finis. L'institutionnalisation prévue concerne des procédures et la méthode de construction d'une suite de rationnels qui converge vers un irrationnel de la forme $\sqrt{d}$, d un entier supérieur à 2, avec d – 1 un carré parfait. L'organisation générale de la situation part de l'idée d'une instanciation de ce théorème d'existence via la recherche d'une suite rationnelle convergeant vers un irrationnel algébrique, de sorte que la construction d'une telle suite : 1) problématise la nature des nombres (différence entre rationnels/irrationnels, représentations numériques des nombres et lien avec les approximations successives, les limites, etc.) ; 2) soit une méthode généralisable à d'autres irrationnels algébriques de la même forme. Nous avons guidé l'introduction par un travail sur l'irrationalité inspiré du principe d'exhaustion s'appuyant sur la figure d'un triangle rectangle isocèle, utilisé par Euclide pour montrer l'incommensurabilité de la diagonale d'un carré. A condition de disposer de notations convenables, le procédé itératif appelé antiphérèse conduit à ce que l'on appelle aujourd'hui, le développement de $\sqrt{2}$ en fraction continue illimitée périodique. Plus précisément, dans le cas d'un entier d ≥ 2 vérifiant les conditions requises, l'égalité $\sqrt{d}-\alpha=\frac{1}{\alpha+\sqrt{d}}$, où $\sqrt{d-1}=\alpha$ permet de donner le développement en fraction continue de $\sqrt{d}=\alpha+\cfrac{1}{2\alpha+\cfrac{1}{2\alpha+\cfrac{1}{2\alpha+etc.}}}$ et la suite des réduites de $\sqrt{d}$, obtenue en arrêtant à chaque fois le processus itératif à un ordre précis, n'est autre que la suite définie par $u_0=\alpha, u_{n+1}=\alpha+\frac{1}{u_n+\alpha}$. Cette situation met en jeu des questions sur irrationalité, approximations, construction, etc. et oblige les étudiants à confronter le fonctionnement du formalisme sur des objets spécifiques.

Le point fixe de cosinus

A côté des objectifs fixés à la situation de l'antiphérèse, celle du point fixe de cosinus vise de plus à amener les étudiants à un travail plus approfondi sur les nombres : différence entre rationnels /irrationnels (irrationnels algébriques, irrationnels transcendants), approximation des réels/limite, précision d'approximation, rapidité de convergence, etc. La méthode d'approximation que nous avons choisie est celle de Newton, issue d'une idée de ce dernier pour la résolution d'une équation algébrique du troisième degré. Elle est fondée sur l'idée de l'interprétation graphique d'une courbe approchée par sa tangente. Rappelons qu'à cette époque, l'énoncé du procédé était empirique. Aujourd'hui, on généralise le procédé de Newton à toute équation de la forme $g(x)=0$ où g est une fonction de classe C^2 sur un intervalle fermé de R, et telle que l'équation possède une unique solution simple α $(g(\alpha)=0 \; et \; g'(\alpha)\neq 0)$ à l'intérieur de cet intervalle. La convergence vers α de la suite construite par la méthode de Newton résulte d'un choix conséquent de son premier terme. Nous avons orienté le travail de sorte que les étudiants : 1) procèdent à un premier contact graphique et numérique avec les idées qui fondent la méthode de Newton celles du rôle de la tangente, du rôle du premier terme, des conditions sur la fonction ; 2) fassent le lien entre les conditions de convergence et les outils de preuve de la convergence (en particulier l'usage de la formule de Taylor et ce que cet usage nécessite comme hypothèses aussi bien explicites qu'implicites et propres aux conditions de convergence de la suite). Cette situation a confronté les étudiants à la question de l'existence de la solution d'une équation non résoluble par les outils algébriques à disposition, et les a obligé à s'interroger sur la nature des nombres transcendants et le lien qu'ils entreprennent avec le formalisme de l'analyse.

EFFETS DE L'INGENIERIE : SYNTHESE ET DISCUSSION

Au terme des résultats des expérimentations, nous avons pu souligner la portée de travail des étudiants sur les situations expérimentées via trois points essentiels : 1) Saut conceptuel sur les nombres : le travail dans les situations a permis aux étudiants d'envisager les nombres réels avec leur statut d'objet mathématique. La focalisation sur les méthodes numériques d'approximations successives a favorisé un accès indirect à cet objet. Au final, les questions qui portaient au départ sur les nombres, concourent à l'émergence du problème général de l'accessibilité, et donc d'une réflexion métamathématique. Cette accessibilité est ce qui donne la clé d'un travail sur un réseau de savoirs de l'analyse réelle : densité de Q dans R, limite d'une suite, point fixe, segments emboîtés, valeurs intermédiaires, accroissements finis, formule de Taylor ; 2) Problématique existence/accessibilité : la question de l'existence des objets spécifiques permet, non seulement de dévoluer les situations, mais aussi de tirer le travail des étudiants vers la dimension pragmatique, ce qui les conduit à problématiser la question d'existence des objets mathématiques. De ce fait, un travail de va et vient entre preuves pragmatiques et preuves formelles s'installe, favorisant l'émergence du lien entre la procédure de recherche (mise en œuvre dans le milieu objectif) et la preuve finalement établie ; 3) Lien entre variables didactiques et les modifications requises dans le travail des étudiants en analyse à l'entrée à l'université : les valeurs des variables didactiques dont le modèle théorique est issu d'une réflexion épistémologique, contribuent, par l'intermédiaire d'un milieu mixte, à la prise en compte d'une évolution progressive dans travail des étudiants. Cette progression est ce qui permet d'articuler les éléments du processus d'entrée dans les connaissances de l'analyse réelle : la situation de l'antiphérèse donne un statut à des nombres vus jusque là comme des "notations" ; celle du point fixe de cosinus permet d'aller plus loin dans la conceptualisation. Elle donne accès à des nombres réels qu'on ne sait pas expliciter, et donc oblige à mettre en œuvre des procédures formelles de traitement de ces nombres. Bien entendu ces procédures ne peuvent être que des énoncés analytiques.

Nous avons donc clairement identifié deux étapes irréductibles l'une à l'autre dans l'enseignement/apprentissage de l'analyse réelle : la première mène d'un travail pragmatique de recherche d'approximation d'un nombre tel que $\sqrt{2}$ à la conception de nombres irrationnels ; la deuxième amène à concevoir que, pour contrôler des objets non descriptibles de façon simple, il est nécessaire de mettre en œuvre des énoncés formels d'une certaine nature. En dehors des savoirs académiques ainsi construits, il apparaît de façon incontournable que les situations sont porteuses de connaissances métamathématiques. Finalement la question de l'existence des objets de base de l'analyse réelle a induit la question de la nature du travail des étudiants dans des situations qui veulent prendre appui sur le contenu conceptuel de cette existence (Comment inciter les étudiants à interroger ces objets et susciter leur intuition ?). Cette question d'existence génère aussi un autre type de questionnements ; celui lié à l'unicité (dans le cas où ce qui existe est unique, par exemple la notion de limite). Or, traiter de l'unicité de l'objet existant dans l'analyse standard se déroule en général suivant une démarche classique qui conduit à supposer la non unicité et à en conclure une absurdité. Cette question n'a pas eu un statut particulier dans ce travail.

Hasardons-nous par exemple sur la question de l'unicité de la limite d'une suite convergente. Si l'on part de la définition formelle, rien ne nous permet de dire que la limite est unique. Une fois la preuve établie – et qui consiste à prouver que $\forall \varepsilon>0$, $|l-l'|<2\varepsilon$, on aura réglé la question sur le plan syntaxique. On pourrait penser que la contraposée de la définition est plus convaincante $l \neq l^{'}, si\ \exists \varepsilon > 0, |l-l'| \geq \varepsilon$. Implicitement fondée sur le continu archimédien de l'ensemble des réels, les étudiants de début de première année d'université ont-ils jamais mis en doute la forme de cette définition ? Certains travaux investiguant le statut de l'égalité en analyse, ont montré les difficultés des étudiants à concevoir la forme de la définition. Face à des questions du type que peut-on dire de a et b sachant que $\forall\, \varepsilon > 0, |a-b| < \varepsilon$, les étudiants sont dans l'incapacité de conclure sur l'égalité. Dans le cadre de cette étude, nous pouvons attester que la problématique syntaxe/situations se retrouve dans cette question. Ce que nous pourrions investiguer concerne la consistance et/ou pertinence du recours aux méthodes numériques d'approximation pour traiter des questions liées au statut de l'égalité en analyse standard.

REFERENCES

Bergé, A. (2010). Students' perceptions of the completeness property of the set of real numbers. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 41(2), 217–227.

Bloch, I. (2002). Différents niveaux de modèles de milieu dans la théorie des situations. *Actes de la 11ème EEDM*, 125-139.

Bloch, I., & Ghedamsi, I. (2005) Comment le cursus secondaire prépare-t-il les élèves aux études universitaires ? *Petit x*, 69, 7-30.

Bloch, I., & Ghedamsi, I. (2010) From numbers to limits: situations as a way to a process of abstraction. *Proceedings of CERME 6*, 2386 – 2395.

Bosch, M., Fonseca, C., & Gascón, J. (2004). Incompletitud de las organizaciones matemáticas locales en las instituciones escolares. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 24(2/3), 205–250.

Chellougui, F. (2009). L'utilisation des quantificateurs universel et existentiel en première année d'université : entre l'explicite et l'implicite. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 29 (2), 123-154.

Dias, M., Artigue, M., Jahn A., & Campos, T. (2008). A comparative study of the secondary tertiary transition. In M. F. Pinto & T. F. Kawasaki (Eds.). *Proceedings of the 34th Conference of the PME*, 2, 129–136.

Dieudonné J. (1978) *Abrégé d'histoire des mathématiques*. Tome I. Editions Hermann, Editeurs des sciences et des arts.

Dieudonné, J. (1980). *Calcul infinitésimal*. Editions Hermann.

Ghedamsi, I. (2008). Enseignement du début de l'analyse réelle à l'entrée à l'université : Articuler contrôles pragmatique et formel dans des situations à dimension a-didactique. (PhD Thesis) Université Bordeaux 2, France & Université de Tunis, Tunisie.

Ghedamsi I., & Chellougui F. (2013) Antiphérèse de √2 : introduction d'une dimension a-didactique dans l'enseignement de l'analyse à l'université. *Actes du colloque EMF2012*, 987–1004.

González-Martín, A. S., Nardi, E., & Biza, I. (2011). Conceptually-driven and visually-rich tasks in texts and teaching practice: The case of infinite series. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 42(5), 565–589.

González-Martín, A. S., Bloch, I., Durand-Guerrier, V., & Maschietto, M. (2014). Didactic Situations and Didactical Engineering in university mathematics: cases from the study of Calculus and proof. *Research in Mathematics Education*, 16(2), 117–134.

Praslon, F. (2000). Continuités et ruptures dans la transition Terminale S/DEUG Sciences en analyse. Le cas de la notion de dérivée et son environnement. *Actes du Séminaire National de Didactique des Mathématiques*, 185–220.

Tall D., & Mejia-Ramos J-P. (2006). *The long term cognitive development of different types of reasoning and proof*. Conference on explanation and proof in mathematics, philosophical and educational perspectives, Essen, Germany.

Vandebrouck, F. (2011). Students' conceptions of functions at the transition between secondary school and university. *Proceedings of CERME 7*, 2093–2102.

Winsløw, C. (2008). Transformer la théorie en tâches : La transition du concret à l'abstrait en analyse réelle. *Actes de la 13ème EEDM*.