# Introduire la notion de convergence avec une ingénierie des années 1980 : rêve ou réalité didactique pour l'enseignant?

Stéphanie Bridoux[1]

[1]Université de Mons, Belgique et LDAR, EA 4434, stephanie.bridoux@umons.ac.be

*Nous présentons une expérimentation visant à introduire la notion de convergence d'une suite numérique à des étudiants belges en première année universitaire en reprenant une ingénierie de 1983. Nous nous centrons ici sur le rôle que l'enseignant peut jouer à chaque étape de l'ingénierie pour faire émerger la définition formelle de la notion. L'expérience témoigne de la robustesse de cette ingénierie « d'un autre temps » pour le public actuel moyennant une gestion adaptée du travail des étudiants par l'enseignant.*

*Mots clefs: ingénierie didactique, convergence d'une suite, formalisation, conceptualisation, pratiques enseignantes.*

## INTRODUCTION

La convergence d'une suite de nombres réels est une notion clé dans la plupart des cours d'Analyse en première année universitaire donnés en Belgique et en France notamment. Cette notion est déjà abordée dans l'enseignement secondaire belge. La définition en $\varepsilon - N$ est donnée mais n'est finalement pas ou peu travaillée avec les élèves. L'accent est rapidement mis sur l'étude des suites arithmétiques et géométriques pour lesquelles la convergence est abordée de manière intuitive. Les résultats liés à la convergence des suites (unicité de la limite, théorème des gendarmes,…) sont admis sans démonstration et les exercices proposés sont souvent réduits à des calculs de limites utilisant les règles de calculs qui, elles aussi, ne sont pas démontrées.

Les étudiants qui entrent à l'université ont donc des conceptions, souvent intuitives et/ou erronées, sur la notion de limite. Le rôle de l'enseignant universitaire nous semble alors important au moment de l'introduction de la notion puisqu'il s'agit de montrer aux étudiants la nécessité de la définition formelle de la convergence et de leur faire comprendre en quoi les conceptions acquises dans l'enseignement secondaire ne sont pas toujours suffisantes pour appréhender la notion. Cependant, lorsque la notion de convergence est étudiée à l'université, elle est introduite plus ou moins rapidement avec la définition formelle. D'une certaine manière, tout se passe comme si la notion était présentée indépendamment des connaissances, même intuitives ou erronées, que les élèves ont acquises dans l'enseignement secondaire.

En 1983, Aline Robert a élaboré et expérimenté à de nombreuses reprises une ingénierie pour introduire la définition formelle de la notion de convergence tout en s'appuyant sur les connaissances déjà présentes chez les étudiants. Après voir décrit notre problématique de recherche, nous présentons l'ingénierie et son expérimentation auprès d'étudiants belges en première année d'université en nous centrant sur le rôle que peut jouer l'enseignant pour faire émerger la définition formelle.

## PROBLÉMATIQUE

De nombreuses recherches ont mis en évidence les difficultés des étudiants universitaires avec la notion de limite d'une suite numérique, que ce soit du côté des représentations développées par les étudiants (Robert, 1983; Roh, 2008), ou encore du côté de la complexité de la définition formelle (Mamona-Downs, 2001; Durand-Guerrier & Arsac, 2005).

Concernant le rôle de l'enseignant universitaire, qui nous intéresse ici, Durand-Guerrier (2005) a par exemple montré que les pratiques des enseignants dans la manipulation des écritures quantifiées pouvaient être mises en relation avec les difficultés des étudiants. Bridoux, Grenier-Boley et Hache (projet de texte pour le colloque INDRUM 2016) étudient l'impact possible du langage utilisé par l'enseignant au moment de l'introduction de la définition formelle de la notion de limite (suite et fonction) sur les apprentissages des étudiants, notamment par le biais des reformulations de la définition. Mais quoi qu'il en soit, le rôle de l'enseignant universitaire dans l'acquisition de la notion de convergence fait l'objet de peu de recherche.

Nous nous intéressons ici au rôle joué par l'enseignant pour introduire la notion de convergence avec une ingénierie didactique. Au fil du temps, force est de constater que l'ingénierie de Robert a été peu reprise par les enseignants universitaires, alors que la notion est toujours enseignée aujourd'hui et que les difficultés rencontrées par les étudiants dans son processus de formalisation sont toujours d'actualité. Une explication possible est la difficulté, pour un enseignant, à reproduire une ingénierie dans sa classe en l'adaptant éventuellement à son public. Artigue (1988) explique que les ingénieries didactiques posent effectivement la question de leur reproductibilité, menant parfois à un phénomène d'obsolescence.

Dans le cadre des travaux menés par la CIIU (Commission Inter-IREM Université, en France), nous avons fait le pari que l'ingénierie de Robert pouvait être adaptée au public actuel, en y apportant quelques modifications mineures (CIIU, 2015). Cependant, Robert a peu développé le rôle de l'enseignant, notamment en ce qui concerne son discours au moment de l'introduction de la définition formelle. Nous abordons donc ici la question suivante: quel est le rôle précis que l'enseignant peut jouer à chaque étape de l'ingénierie pour faire émerger la définition de la convergence d'une suite chez les étudiants?

## INGÉNIERIE ET DÉROULEMENT PRÉVU

L'élaboration d'ingénieries pose naturellement la question de caractériser les mathématiques à enseigner. Compte tenu des différentes fonctions que les notions jouent dans les programmes scolaires et dans les cours élaborés par les enseignants, Robert (2011) distingue différents types de notions en s'appuyant notamment sur la distance entre les connaissances anciennes ou déjà là chez les élèves et les nouvelles connaissances visées. La prise en compte des spécificités des notions à enseigner mène alors à des choix variés pour introduire les nouvelles notions. En ce sens, la notion de convergence d'une suite numérique est une notion formalisatrice, unificatrice et généralisatrice (notion FUG). En effet, elle unifie et généralise des notions (même intuitives) rencontrées par les élèves au lycée à partir d'un nouveau formalisme. Les premières notions de topologie (Bridoux, 2011) et celles d'algèbre linéaire (Dorier, 1997) possèdent des caractéristiques semblables. Pour les notions FUG, l'écart entre l'ancien et le nouveau est très grand. Les caractères F, U et G de la notion de convergence font que celle-ci est difficile à introduire tout en lui donnant du sens. Cela amène le didacticien à concevoir pour les notions FUG des situations plus partielles que les situations fondamentales (au sens de Brousseau, 1998), n'ayant pas que des phases adidactiques et où on alterne des phases de recherche individuelle chez les étudiants avec des phases d'institutionnalisation de l'enseignant, en s'appuyant sur des leviers tels que des commentaires explicatifs, des changements de cadres ou de registres (au sens de Douady, 1986).

Nous avons expérimenté l'ingénierie de Robert (1983) avec un groupe de 45 étudiants d'une filière informatique en première année universitaire en Belgique. La notion n'avait pas encore été abordée avec eux à l'université, leurs seules connaissances sur la notion étaient donc celles construites dans l'enseignement secondaire. Par ailleurs, durant la semaine qui a précédé l'expérimentation, trois séances (environ 5 heures) ont été consacrées à la définition d'une suite, à la représentation graphique et à l'étude des caractères majorés, minorés ou bornés des suites. Ces notions ont été travaillées avec les étudiants sur de nombreux exemples. Voici la séquence telle qu'elle a été proposée à ce public.

1) *Considérons les suites de terme général suivant :*
   1. $u_n = \frac{n^2-25}{2n^2+1}$ *(échelle sur l'axe des ordonnées : une unité = 2cm).*
   2. $u_n = \frac{(-1)^n}{20}$ *(échelle sur l'axe des ordonnées : une unité = 10cm).*
   3. $u_n = \frac{1}{n}\cos n$ *(échelle sur l'axe des ordonnées : une unité = 2cm).*
   4. $u_n = \cos n$ *(échelle sur l'axe des ordonnées : une unité = 5cm).*
   5. $u_1 = 1, u_2 = 2, u_3 = 3, u_4 = -1, u_n = 2$ *pour tout* $n \geq 5$.
   6. $u_n = \frac{(-1)^n}{n^2+1}$ *(échelle sur l'axe des ordonnées : une unité = 10cm).*
   7. $u_n = \cos n\frac{\pi}{6}$ *(échelle sur l'axe des ordonnées : une unité = 2cm).*
   8. $u_n = \sin\frac{1}{\sqrt{n}}$ *(échelle sur l'axe des ordonnées : une unité = 10cm).*
   9. $u_n = n^2 + 1$ *(échelle sur l'axe des ordonnées : une unité = 0,5cm).*
   10. $u_n = \frac{1}{n+(-1)^n\sqrt{n}}$ $(n \geq 2)$ *(échelle sur l'axe des ordonnées : une unité = 10cm).*

   *Après avoir dressé un tableau de valeurs permettant de calculer les 10 premiers éléments de chaque suite, représentez graphiquement chaque suite sur un dessin différent.*

2) *Pouvez-vous classer ces dessins ? Expliquez les critères permettant vos classements.*
3) *Dans chaque cas, pouvez-vous ou non trouver un nombre l et un entier $n^*$ à partir duquel $l - \frac{1}{10} \leq x_{n^*} \leq l + \frac{1}{10}$. Expliquez brièvement votre choix. Même question en remplaçant $\frac{1}{10}$ par $\frac{1}{100}$. Mettez en relation ce que vous venez d'obtenir avec vos classements.*
4) *Les énoncés suivants sont-ils vrais ou faux ? Justifier vos réponses par écrit.*
   i) *Une suite à termes positifs qui tend vers 0 est décroissante à partir d'un certain rang.*
   ii) *Si une suite a une limite strictement positive, tous ses termes sont strictement positifs à partir d'un certain rang.*

Le fil conducteur de l'ingénierie est de prendre appui sur une représentation dynamique [1] de la notion de convergence, très présente chez les étudiants (Robert 1983), pour classer les dessins (question 2) et d'enrichir cette première intuition avec une formulation numérique (question 3). Celle-ci s'avère insuffisante pour rédiger les démonstrations de la dernière question. La définition est alors donnée par l'enseignant et est accompagnée de commentaires pour la construire. La formalisation choisie pour la notion de convergence est une représentation en termes de bandes contenant tous les termes à partir d'un certain rang. L'écriture symbolique correspondante émerge au fur et à mesure grâce au jeu de cadres (au sens de Douady, 1986) entre les dessins et l'écriture formelle. Le nouveau formalisme est donc introduit pas à pas; ce qu'il unifie et généralise se fait par la reprise de diverses situations (des bandes de largeur 1/10, puis de largeur 1/100 et enfin toutes les bandes de largeur $\varepsilon > 0$ à la dernière question). En ce sens, l'ingénierie de Robert prend effectivement en compte la nature FUG de la notion de convergence.

Nous décrivons maintenant comment nous envisageons le rôle de l'enseignant à chaque étape de l'ingénierie, en dégageant quelques « passages commodes » qui peuvent selon nous favoriser l'émergence de la définition à la question 4 tout en laissant des marges de manœuvre à l'enseignant.

Pour la première question, nous avons conservé l'idée de faire travailler les étudiants en petits groupes de trois ou quatre étudiants, comme le prévoyait Robert, et de répartir la représentation des dix suites dans chaque groupe. La calculatrice est autorisée pour la construction des tableaux de valeurs mais les dessins sont réalisés à la main. L'objectif est que les étudiants discutent entre eux de leurs dessins. Le rôle de l'enseignant est ici de maintenir les conditions de travail.

À la question 2, les étudiants doivent produire des critères dans lesquels ils intègrent les dix suites. Certaines suites peuvent évidemment faire débat. Le comportement de convergence pourrait ne pas émerger dans tous les groupes comme un critère de classement. Nous pensons que pour mener à bien cette question, un certain nombre de connaissances doivent être disponibles chez les étudiants. Il nous semble évident que l'objet « suite » et la représentation graphique d'une suite doivent en faire partie mais les notions de croissance et de suite majorée/minorée/bornée s'avèrent pertinentes comme critères de classement. En d'autres termes, le rôle de l'enseignant est aussi d'avoir préalablement organisé un milieu (au sens de Brousseau, 1998) pour les étudiants suffisamment riche pour questionner les liens entre les notions durant la séquence. L'enseignant circule donc auprès des étudiants pour prendre connaissance des critères retenus et les amène, si nécessaire, à discuter du comportement de convergence. Il peut par exemple rappeler que le dessin ne montre pas tout et que certains comportements nécessitent un regard plus global sur la suite. L'objectif est de lancer une discussion dans les groupes sur ce qui se passe « loin dans la suite ». L'enseignant collecte ensuite les classements. À cette étape, il peut expliquer aux étudiants que le choix est de se centrer sur le comportement de convergence, qui est le seul critère dont on n'a pas une définition précise. Il peut aussi insister sur le fait que la représentation (intuitive) qui leur a permis de classer les suites par rapport à ce comportement est peut-être correcte mais que les choix de classement restent des conjectures. De plus, certaines suites peuvent faire débat et ne pas avoir été classées de la même manière dans tous les groupes. Nous allons voir que le travail proposé par l'enseignant à la question 3 peut amener des conjectures correctes dans tous les groupes.

À la question 3, les étudiants reprennent le travail sur les dessins pour étudier les inégalités avec 1/10 et puis avec 1/100. L'objectif est d'abord de comprendre comment utiliser les dessins pour répondre à la question. On n'attend donc pas ici un travail algébrique pour prouver que les inégalités sont vérifiées. Tous les dessins ne permettent pas de répondre à la question avec 1/100 puisqu'on n'a pas assez de points. L'enseignant peut le rappeler si nécessaire. Nous prévoyons alors une phase d'institutionnalisation. L'enseignant interprète avec les étudiants cette première formulation numérique de la convergence avec le vocabulaire suivant : « on cherche s'il est possible de construire une bande autour de $l$ dans laquelle les éléments de la suite rentrent à partir d'un certain rang [2] ». L'enseignant peut également montrer des dessins sur ordinateur où, pour quelques suites, le nombre d'éléments représentés est plus important et des bandes de largeurs différentes sont tracées. L'enseignant peut aussi choisir l'une ou l'autre suite pour réaliser le travail algébrique permettant de justifier le choix du réel $l$ et du naturel $n^*$ et le fait que les inégalités sont vérifiées. Il y a également lieu d'amorcer une discussion sur la largeur des bandes en relation avec la convergence; le fait que la suite 2 vérifie les inégalités pour 1/10 mais pas pour 1/100 doit être pointé. À cette étape également, l'enseignant peut représenter une suite qui suscitait un débat à la question précédente et montrer que si on construit une bande autour d'un nombre qui n'est pas le bon candidat limite, la propriété n'est pas satisfaite.

À la question 4, les étudiants travaillent de nouveau en petits groupes. L'enseignant peut rappeler que les suites de la question 1 sont des exemples pour guider l'intuition, voire pour trouver un contre-exemple. Pour la deuxième affirmation, l'enseignant doit poursuivre la discussion sur la largeur des bandes, qui dépend ici de la limite, pour pouvoir définir la convergence et amener l'idée que la formulation algébrique de la question précédente doit être vérifiée quelle que soit la largeur de la bande. L'enseignant présente alors la définition en $\varepsilon - N$.

## L'EXPERIMENTATION

Quinze groupes de trois ou quatre étudiants ont été formés, la constitution des groupes étant laissée à la charge des étudiants. Deux de nos collègues ont participé à l'expérience pour encadrer le travail des étudiants dans les phases de recherche individuelle. L'expérience a duré 3h30, réparties sur deux séances de cours.

Il n'est évidemment pas possible de retranscrire tous les échanges entre l'enseignant et les étudiants dans ce texte. Nous étudions plus précisément le rôle de l'enseignant durant la correction de la question 4, où la définition de la notion devient nécessaire pour justifier la deuxième affirmation. Nous nous centrons sur le vocabulaire introduit par l'enseignant pour donner petit à petit du sens à la notion de convergence.

Pour la seconde affirmation, la majorité des étudiants pense qu'elle est vraie mais aucun groupe ne peut la justifier. L'enseignant demande quelle intuition a guidé les étudiants pour dire que c'est vrai. Un étudiant prend la parole :

Étudiant 7 : On a vu que si une suite converge vers $l$, toutes les bandes centrées en $l$… il y a toujours un moment où les éléments sont dans la bande.

Le fait d'évoquer toutes les bandes centrées en $l$ n'était évidemment pas prévu par l'enseignant. Il revient donc sur les constatations qui avaient émergé à la question 3 de la présentation des dessins montrés sur ordinateur:

Enseignant: Ce n'est pas exactement ça qu'on a vu, on n'a pas parlé de toutes les bandes mais de toutes les bandes entre 1/10 et 1/100 et on était resté avec l'idée que la bande de largeur 1/10, ça ne fonctionne pas pour toutes les suites, 1/100 ça fonctionnait, qu'effectivement entre 1/10 et 1/100 ça avait l'air de fonctionner aussi. Est-ce que cette idée peut être reprise ici pour expliquer ?

L'enseignant réalise en même temps un dessin au tableau. Il s'agit du premier graphique (à gauche sur le tableau de la figure 1). Le dialogue se poursuit :

Enseignant: Ça veut dire que les éléments sont compris entre $l$-1/100 et $l$+1/100. Vous voyez que si les éléments sont dans cet espace, conformément à ce que dit l'affirmation, à partir de $n^*$, les éléments seront positifs. Maintenant est-ce que ce dessin fait office de preuve ?

Étudiant 7 : Non parce que vous avez choisi un exemple qui allait bien pour nous montrer.

Enseignant : Tu peux me donner un exemple qui va moins bien ?

Étudiant 8 : Il faut prendre quelque chose de petit pour $l$, par exemple $l$ qui vaut 0. Du coup, on a le $l$-1/100 en-dessous et les éléments ne sont plus positifs.

Enseignant : Sauf que je ne peux pas prendre $l = 0$, par rapport à l’énoncé.

Étudiant 8: On prend $l = 1/100$ par exemple.

Enseignant : Oui. Vous voyez, mon dessin, je l’ai fait avec une valeur de $l$ qui est suffisamment grande pour qu’en faisant $l$-1/100 et $l$+1/100, mes éléments soient dans l’espace et soient donc positifs.

L’enseignant fait un autre dessin au tableau pour mettre en défaut la situation (à droite sur le tableau de la figure 1).

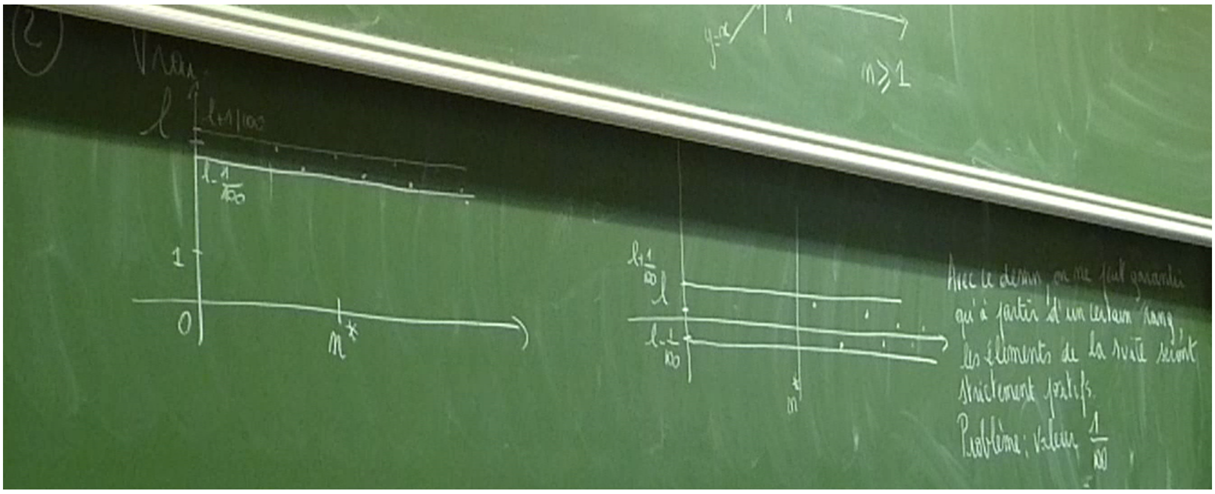

**Figure 1: Question 4, largeur des bandes**

Enseignant : Bon, comment pensez-vous pouvoir régler le problème ? Qu’est-ce-que ça met en défaut ça (en montrant le dessin qui est à droite sur la figure 1) ?

Étudiant 8 : C’est la valeur 1/100 qui pose problème.

L’enseignant amène alors lui même l’idée de choisir un espace qui dépend de $l$ en reprenant toujours le vocabulaire introduit à la question 3.

Enseignant : Exact, ce qui pose problème ici, c’est l’espace qu’on laisse autour de $l$. Donc ici, avec ce dessin (il écrit au tableau ce qu’il dit), on ne peut pas garantir qu’à partir d’un certain rang, les éléments de la suite seront strictement positifs. Le problème est la valeur 1/100 (l’enseignant reprend oralement). Ce qu’on commence à sentir, c’est que cette possibilité de faire rentrer les éléments dans la bande qu’on délimite autour de $l$, ça va dépendre de $l$. Est-ce que vous auriez une valeur à me proposer comme espace autour de $l$ qui garantit que les éléments vont rentrer à partir d’un certain rang dans l’espace que je délimite ?

Pas de réponse.

Enseignant : Peut-être pas une valeur précise mais me dire comment vous pouvez construire cet espace ?

Étudiant 9: Inférieur à $l$.

Enseignant : Donc compris entre 0 et $l$, c'est ça.

Le professeur fait un dessin qu'il complète au fur et à mesure de l'échange suivant et écrit au tableau (voir figure 2) :

Enseignant : Pour que ça fonctionne, il faudrait laisser autour de $l$ un espace $\varepsilon$ tel que $0 < \varepsilon < l$. Allez, il y a beaucoup de nombres entre 0 et $l$, vous pouvez m'en donner un exemple ?

Plusieurs étudiants : On divise en deux.

Étudiant 10 : $\varepsilon = \frac{l}{2}$ fonctionne.

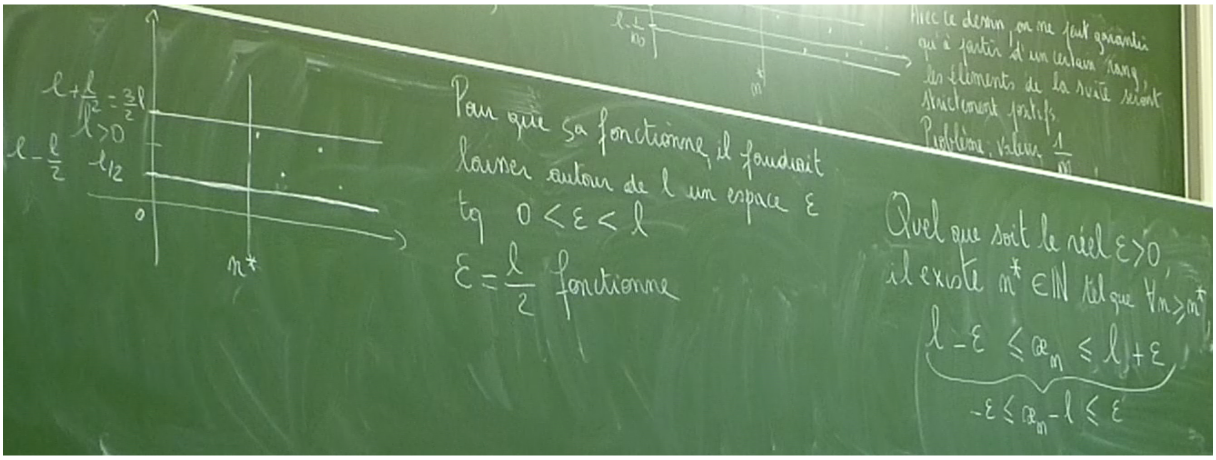


**Figure 2: Émergence de la définition**

Le professeur dresse un bilan oral et fait émerger la définition, comme le montre la figure 2:

Enseignant : Donc on est arrivé à la question 3, 1/10 ne fonctionnait pas, 1/100 fonctionnait pour toutes les suites de la liste mais cette valeur est remise en défaut ici où la largeur doit dépendre du candidat limite. Donc une manière simple choisie par les mathématiciens pour regrouper tout ça, c'est de se dire, bon, avec 1/100 ça marche, plus on réduit l'espace, ça a l'air de marcher aussi, mais de temps en temps, l'espace doit aussi dépendre de la limite. Au final, ce qu'on va demander pour caractériser la convergence, c'est que cet espace qu'on délimite autour de $l$, ce soit valable tout le temps. On va demander que quel que soit l'espace qu'on délimite autour de $l$, à partir d'un certain moment, les éléments doivent rentrer dans cet espace, sachant et on l'a vu sur les dessins, que si vous laissez beaucoup d'espace, ce n'est pas intéressant. Les éléments vont rentrer facilement dans cet espace, ce n'est pas ça l'idée de la convergence. L'idée c'est d'autoriser des espaces tellement petits, et que là aussi ça garantit que les éléments rentrent dans l'espace. Donc une définition de la convergence c'est d'avoir :

Quel que soit le réel $\varepsilon > 0$, il existe $n^* \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n^*, l - \varepsilon \leq x_n \leq l + \varepsilon$.

L'enseignant s'appuie ici sur le vocabulaire introduit tout au long de la séquence pour introduire la définition formelle avec des mots tout d'abord puis avec des symboles.

**Bilan**

Durant la correction de cette question, on peut voir l'enseignant prendre constamment appui sur les questions précédentes ainsi que sur l'image en termes de bandes autour du candidat limite pour faire émerger la définition. La réalisation des trois premières questions est donc essentielle pour le bon déroulement de la question 4.

Par ailleurs, pour l'enseignant universitaire, cette expérimentation nécessite probablement des changements de pratiques. Tout d'abord, il y a lieu d'accepter de consacrer un temps long à l'introduction d'une nouvelle définition. Comme nous l'avons expliqué, l'expérience a duré 3h30. L'enseignant doit également mettre en place un vocabulaire peut-être plus informel que d'ordinaire ainsi que des images au lieu de commencer par les définitions formelles, comme souvent dans les cours magistraux. La réalisation de dessins est elle aussi un élément essentiel dans le déroulement de l'ingénierie. Un post-test réalisé après l'enseignement complet (cours et exercices) de la notion de convergence a révélé qu'environ 90% des étudiants avaient une représentation statique [1] (au sens de Robert, 1983) de la notion.

## CONCLUSION

Il nous semble tout d'abord important de souligner la robustesse de cette ingénierie « d'un autre temps ». Pour tenter d'en faciliter sa reproductibilité auprès des étudiants d'aujourd'hui et surmonter le phénomène d'obsolescence évoqué au début de ce texte, c'est le rôle de l'enseignant que nous avons choisi ici de préciser et d'étudier. Dans cette ingénierie, le rôle de l'enseignant est de montrer aux étudiants la nécessité d'une définition formalisée de la notion de convergence en commençant par lui donner du sens et en la faisant apparaître comme un outil de démonstration à la dernière question. Cet enjeu prend selon nous en compte les caractères F, U et G de la notion : on s'appuie sur une « pré-notion » de convergence liée à un caractère dynamique de rapprochement, généralisant à toute suite la définition, ce qui précède ne suffisant pas, avec un formalisme adéquat. Nous avons présenté un déroulement mais d'autres possibilités existent. L'enseignant peut en effet choisir une autre manière de répartir les étudiants, en groupes ou non, de répartir le temps de travail de manière différente (notre découpage tient avant tout à la durée d'une séance), voire d'autoriser la calculatrice graphique pour gagner du temps, même si pour ce dernier point, nous restons d'avis que le travail papier-crayon engendre des discussions dont on ne peut pas affirmer qu'elles se transposeraient naturellement en regardant un dessin « déjà fait » par la calculatrice. De nouvelles expérimentations sont prévues et seront complétées par des analyses des notes prises par les étudiants et des analyses de questions portant sur la convergence issues d'évaluations.

## NOTES

1. Les représentations dynamiques sont des représentations en termes d'action où le mot « converger » est exprimé en termes de « se rapprocher de ». Les représentations statiques sont des représentations en langue naturelle de la définition

formalisée. Robert (1983) a montré que les étudiants chez qui le modèle statique était présent réussissaient mieux les exercices portant sur la notion de convergence.
2. L'expression « à partir d'un certain rang » a été déjà été rencontrée par les étudiants dans le chapitre précédent sur les suites numériques.

## REFERENCES


Artigue, M. (1988). Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *9/3*, 281-308.

Bridoux, S. (2011). *Enseignement des premières notions de topologie à l'université. Une étude de cas.* Thèse de doctorat. Université Paris Diderot (Paris 7).

Bridoux, S., Grenier-Boley, N. & Hache, C. (2016). Moments d'exposition des connaissances à l'université: le cas de la notion de limite. *Texte soumis au colloque INDRUM 2016*, Montpellier, France.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

CIIU (2015). Introduction aux concepts de limite de fonction et de suite en première année d'université: adaptation de deux ingénieries. *Texte présenté dans le GT7 du colloque EMF 2015*, Alger, Algérie.

Dorier, J.-L. (Éd.). (1997) *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *7/2*, 5-31.

Durand-Guerrier, V. (2005). Questions de logique dans l'enseignement supérieur. Quelques pistes pour faire évoluer les pratiques enseignantes. *Actes du colloque Questions de Pédagogies dans l'enseignement supérieur,* Lille, 2005, 362-368.

Durand-Guerrier V. & Arsac (2005). An epistemological and didactic study of a specific calculus reasoning rule, *Educational Studies in Mathematics*, *60*, 149-172.

Mamona-Downs, J. (2001). Letting the intuitive bear on the formal : A didactical approach for the understanding of the limit of a sequence. *Educational Studies in Mathematics*, *48*, 259- 288.

Robert, A. (1983). L'enseignement de la convergence des suites numériques en DEUG, *Bulletin de l'APMEP, 340*, 431-449.

Robert, A. (2011). Savoirs mathématiques à enseigner : différents types de notion, *Actes de la 11ème journée de l'École doctorale « Savoirs scientifiques », La généralisation dans la production de l'enseignement des savoirs,* Université Paris Diderot.

Roh, K. (2008). Students' images and their understanding of definitions of the limit of a sequence. *Educational Studies in Mathematics*, *69*, 217-233.