Le rôle de la borne supérieure (ou supremum) dans l'apprentissage du système des nombres réels

Analía Bergé

Université du Québec à Rimouski, Canada, analia_berge@uqar.ca

Dans cet article nous montrons que des étudiants universitaires, à qui on a présenté la complétude de l'ensemble des nombres réels à travers l'existence de la borne supérieure (ou supremum) de sous-ensembles non vides et majorés, perçoivent généralement le supremum comme une notion qui ne possède pas d'autre utilité que d'être un majorant. Nous faisons l'hypothèse que la notion de supremum (ainsi que celle de complétude) sera difficilement comprise par les étudiants universitaires à moins qu'elle ne soit introduite par des situations où elle prend son caractère essentiel, soit dans des situations de preuve ou de détermination de valeurs particulières liées au travail en analyse telles que les distances, les limites, les zéros de fonctions ou autres.

Mots clefs: ensemble de nombres réels, complétude, supremum, borne supérieure.

LA COMPLÉTUDE DE L'ENSEMBLE DES RÉELS

L'ensemble **R** des nombres réels est le domaine naturel des fonctions étudiées dans les cours d'analyse mathématique. Dans les livres d'analyse contemporains il est défini comme étant un corps, ordonné et complet. Le fait que **R** soit un ensemble complet est souvent énoncé par un axiome qui détermine l'existence d'un plus petit majorant, nommé borne supérieure ou supremum, pour chaque sous-ensemble non vide et majoré. Il y a, pourtant, d'autres façons équivalentes d'exprimer la complétude. L'inclusion d'un axiome de complétude pour **R**, au-delà de la forme choisie pour l'exprimer, se justifie par le besoin de compter sur un système numérique adéquat afin d'être capable de développer l'analyse : on veut pouvoir déterminer l'existence d'éléments par l'entremise de l'intersection d'intervalles emboités dont la longueur tend vers zéro ou par l'existence de la limite des suites numériques de celles qui « doivent » converger (monotones et bornées, par exemple, ainsi que les suites fondamentales ou de Cauchy); on veut aussi pouvoir affirmer l'existence d'un zéro d'une fonction continue sur un intervalle où elle prend des valeurs de signes différents, etc. Ces résultats et d'autres qui s'en déduisent sont démontrables seulement dans un domaine qui soit un corps ordonné et complet. Les mathématiciens s'en sont pourtant servis afin de faire avancer l'analyse bien avant la définition d'un système numérique possédant ces caractéristiques. Durant les 17e et 18e siècles, l'analyse s'est développée sans compter sur un énoncé arithmétique définissant ce que nous appelons, à partir du 20e siècle, la complétude. Dans les problèmes étudiés alors, l'existence des nombres cherchés n'était pas un problème à analyser; elle était déjà donnée par la nature des phénomènes abordés, par exemple, le calcul d'une distance ou d'une hauteur (Bergé et Sessa, 2003). Les notions de courbe et de droite en jeu étaient celles de lieu géométrique d'un point mobile, qui héritaient la continuité de ce mouvement. Ainsi, Galilée considérait la parabole comme le lieu géométrique décrit par un point suivant la trajectoire d'un projectile (De Gandt, 1988); pour Newton les quantités mathématiques n'étaient pas constituées par les parties les plus petites possibles mais décrites par un mouvement continu. Les lignes étaient engendrées, selon Newton, non pas par l'adjonction de parties mais par le mouvement continu des points (De Gandt, 1990). Remarquons que considérer les lignes comme la somme de ses « parties les plus petites possibles» implique de faire face à une somme ne pouvant être autre chose qu'une somme non dénombrable.

La naturelle continuité de la droite comme support aux développements de l'analyse a été remise en question au début du 19e siècle. La création des géométries non euclidiennes a motivé plusieurs mathématiciens à se questionner sur la portée de la géométrie comme modèle de l'espace physique. Les arguments basés sur des représentations graphiques ont été rejetés, ce qui a amené des mathématiciens à vouloir reconstruire l'analyse en s'appuyant seulement sur des concepts arithmétiques. Nous rencontrons les premières tentatives dans les travaux de certains mathématiciens, dont B. Bolzano et J-A Cauchy, de la première moitié du 19e siècle (Jarnik, 1981, Van Roostelar, 1962, Cauchy, 1994); ils ont explicité, et utilisé dans l'écriture de preuves, quelques-unes des propriétés avec lesquelles le système numérique devait compter, telles que (dites dans notre langage contemporain) la convergence de suites fondamentales, celle de suites croissantes et majorées ainsi que l'existence d'une borne inférieure pour un ensemble minoré. Pourtant, ces propriétés ne pouvaient pas être démontrées, faute d'un système numérique adéquat; elles étaient plutôt considérées comme des propriétés que le système possédait sans discussion sur leur validité. Dans la deuxième moitié du 19e siècle, des mathématiciens, dont Dedekind et Cantor, conscients que ces propriétés n'étaient pas fondées sur une base arithmétique, construisent, chacun de leur côté, un système numérique s'appuyant sur les nombres rationnels dont les propriétés mentionnées plus haut, et d'autres équivalentes, pouvaient être démontrées (Bergé et Sessa, 2003, Durand-Guerrier, 2012). Vers la fin du 19e siècle, la complétude prend la forme d'axiome dans la définition de **R** dans les travaux de Hilbert et lesdites constructions prennent à leur tour le rôle de modèles satisfaisant l'ensemble d'axiomes de cette définition.

La raison d'être de la définition de la complétude de **R**, telle que nous la connaissons aujourd'hui, est donc celle de faire partie de la définition d'un domaine numérique dont on puisse démontrer des énoncés nécessaires pour l'analyse. Les étudiants universitaires suivant des cours en analyse, la reconnaissent-ils? Que comprennent-ils à propos de la complétude? C'est une question large, qui admet plusieurs sous-questions et à laquelle nous avons partiellement répondu en Bergé (2010), nous y reviendrons dans les sections suivantes. Dans ce travail, nous nous penchons sur une de ces sous-questions. Nous nous intéressons à des étudiants à qui on a introduit la complétude via l'existence du supremum de sous-ensembles de **R** non vides et majorés : dans quelle mesure reconnaissent-ils une utilité au supremum liée à la complétude? C'est la question à laquelle nous tenterons de répondre ici.

CADRE DE REFÉRENCE

Ce travail s'inscrit dans un projet en cours dont l'objectif général est double :

1) connaître comment évoluent les connaissances des étudiants universitaires sur la notion de complétude de l'ensemble des nombres réels dans le cadre de l'enseignement universitaire reçu et

2) élaborer des hypothèses sur la façon dont cette notion peut s'acquérir dans les études universitaires.

Pour préciser ce que nous interprétons comme connaissances sur la notion de complétude, nous prenons comme référence la formulation de Douady (1986) :

> Nous disons qu'*un élève a des connaissances en mathématiques* s'il est capable d'en provoquer le fonctionnement comme outils explicites dans des problèmes qu'il doit résoudre, qu'il y ait ou non des indicateurs dans la formulation, s'il est capable de les adapter lorsque les conditions habituelles d'emploi ne sont pas exactement satisfaites, pour interpréter les problèmes ou poser des questions à leurs propos. (Douady, 1986, 11-12).

Afin de penser au *fonctionnement de la complétude comme outil explicite,* la réflexion sur la nature de cette notion mathématique et sur son développement dans l'histoire des mathématiques nous semble indispensable. Cela explique l'ampleur des analyses historiques et épistémologiques dans ce projet, dont les principales lignes se trouvent sommairement énoncées dans la première section de ce travail. L'intérêt et l'importance de l'analyse épistémologique pour le travail en didactique des mathématiques ont été signalés par de nombreux chercheurs en didactique des mathématiques, en particulier par Artigue (1991, 1995). Un tel projet ne peut pas se faire séparément de l'étude des occasions que les étudiants ont de travailler avec cette notion. Nous prenons le cadre qu'offre la Théorie Anthropologique du Didactique (Chevallard 1998, 1999) pour examiner l'ensemble des pratiques mathématiques réalisées par des étudiants au sein d'une institution. Nous utilisons, dans le projet général, notamment la notion de *praxeologie* à travers laquelle Chevallard modélise les pratiques institutionnelles, composée des descriptions de quatre éléments fondamentaux de chaque pratique (tâches, techniques, technologies et théories). Nous utilisons également la notion d'*organisation mathématique* comme un ensemble organisé, structuré de praxeologies (Chevallard 1998).

TRAVAUX PORTANT SUR LA COMPLÉTUDE ET LE SUPREMUM

Nous avons analysé l'organisation mathématique mise en place par une institution donnée à propos de la complétude pour quatre cours corrélatifs d'analyse à l'université que nous nommons cours I, II, III et IV (Bergé, 2008). Nous avons utilisé comme données l'ensemble des fiches de tâches mathématiques adressées aux étudiants, des copies de notes de cours d'étudiants et des entrevues avec des professeurs. Nous nous limitons ici à mentionner que la complétude fait partie des quatre cours, prenant des formes moins explicites ou plus explicites selon le cours. Les deux premiers cours correspondent à ce qu'est appelé en anglais *Calculus*. Nous identifions alors l'explicitation de la complétude comme une marque de la transition entre le *Calculus* et l'Analyse. Nous nous interrogions sur la raison d'inclure explicitement la complétude dans des cours qui ne demandent généralement pas aux étudiants de produire des justifications théoriques comparables à celles qui demandent de déployer la complétude.

Dans une autre étude (Bergé, 2010) nous montrions que des étudiants de trois de ces cours (cours II, III et IV) à qui **R** avait été présenté par les axiomes de corps, d'ordre et de complétude, interrogés par écrit sur la convergence de suites monotones et bornées et sur la complétude, répondaient majoritairement en termes de continuité naturelle (par l'entremise de représentations) et par des énoncés non-opérationnels, c'est-à-dire, qui ne sont pas utilisables pour argumenter formellement. Ce portrait changeait une fois réalisée l'étude d'espaces métriques, au cours IV.

Concernant l'apprentissage de la notion de supremum, nous avons trouvé deux travaux qui soulèvent les difficultés des étudiants. Chellougui (2006) a analysé l'utilisation des quantificateurs universel et existentiel en première année de l'université, prenant comme étude de cas la notion de supremum; elle repère chez les étudiants plusieurs difficultés concernant la formulation du supremum en termes de deux quantificateurs et leur ordre dans la définition. Bills et Tall (1998) ont de leur côté réalisé des entretiens avec cinq étudiants d'un cours d'analyse sur la définition du supremum; ils concluent que l'effort de rendre la définition de supremum opérable peut signifier pour quelques étudiants une demande cognitive trop élevée; à leur avis d'autres étudiants ne disposent que de *concept images* inopérables.

Dans la section suivante nous présentons la méthodologie et les données utilisées dans ce travail.

DONNÉES UTILISÉES ET METHODOLOGIE

Tel que mentionné plus haut, nous voulons connaitre dans quelle mesure les étudiants reconnaissent une utilité au supremum liée à la complétude. Le contexte est celui des cours II, III et IV mentionnés en Bergé (2008 et 2010). Voici quelques caractéristiques des cours en relation à l'apprentissage du supremum. Brièvement, le cours II est un cours de *Calculus* à plusieurs variables. Les étudiants de ce cours appartiennent aux programmes de mathématiques, de physique et de chimie. Durant les premières semaines de ce cours, une révision a été faite, comprenant entre autres l'ensemble des réels, connu déjà des étudiants, qui avaient réussi un cours de *Calculus* en une variable. Le premier cours a démarré avec la définition de majorant d’un sous-ensemble de **R** et de supremum d’un sous-ensemble majoré. Le professeur a montré que si le supremum existe, alors il est unique et il a énoncé l’axiome de complétude : tout sous-ensemble de **R** non vide et majoré admet un supremum. Le professeur a déduit l’existence de l’infimum de tout sous-ensemble de **R** non vide et minoré. Il a présenté la propriété d’Archimède comme une conséquence de l’axiome de complétude et il a démontré que toute suite non décroissante et majorée converge au supremum. Dans les travaux dirigés, en lien avec la complétude, les étudiants ont eu à déterminer et justifier les supremums, les infimums, les maximums et minimums de certains ensembles (s’ils existaient); montrer que certains sous-ensembles de **R** ne sont pas bornés; montrer que l’ensemble des rationnels dont le carré est inférieur à 2 n’a ni maximum ni supremum en **Q**; déterminer si certaines suites convergent (par exemple en analysant si elles sont monotones et bornées) et, plus tard, se servir du théorème de Bolzano pour démontrer des résultats tels que l’existence de zéros de fonctions sous certaines conditions. Les étudiants des cours III et IV appartiennent exclusivement au programme de mathématiques. Au cours III le supremum et l’infimum prennent un rôle d’outil (dans la définition de distances, ou de l’intégrale de Riemann par exemple); ils sont vus aussi comme des objets possédant plus d’une définition (le plus petit majorant d’un sous-ensemble ou le majorant étant la limite d’une suite contenue dans l’ensemble) dont les étudiants doivent prouver leur équivalence. Durant la première semaine du cours IV les étudiants ont à prouver l’équivalence de cinq énoncés exprimant la complétude de **R**, dont l’existence du supremum de sous-ensembles non vides et majorés, l’existence de la limite de suites de Cauchy, celle de suites non décroissantes et majorées, celle d’un élément dans l’intersection d’intervalles emboités et celle d’une sous-suite convergente pour chaque suite bornée.

Un questionnaire de cinq questions a été rempli par les 145 étudiants qui se trouvaient présents le jour de sa passation : 124 sur 192 du cours II, 11 sur 24 du cours III et 10 sur 16 du cours IV. La traduction au français du questionnaire est :

1. Si tu voulais expliquer à un étudiant plus jeune qu’une suite non-décroissante et majorée a une limite, comment le ferais-tu?

2. D’après toi, quelle est l’utilité de la notion de supremum? [Cette question, pour le cours II, était précédée de la suivante : Si tu te souviens de la définition de supremum, peux-tu donner des exemples de a) ensembles qui possèdent un supremum? b) ensembles qui ne possèdent pas de supremum?]

3. Que veut dire pour toi « **R** est un ensemble complet ?» [Seulement cours III et IV]

4. Considérant ce que tu as appris jusqu’à présent en analyse, quelles « parties » demandent l’utilisation de l’axiome de complétude de **R**? Autrement dit, quels concepts et propriétés des nombres et des fonctions on n’aurait pas pu connaitre sans cet axiome? [Seulement cours III et IV]

5. Pour chaque $c \varepsilon$ **Q** considère la fonction f_c: **Q**→**Q**, $f_c(x) = x^2 - c$. Malgré le fait qu'elle n'est pas définie sur **R**, elle est continue. a) Y a-t-il une valeur $c \varepsilon$ **Q** telle que l'affirmation « si f_c prend deux valeurs $f_c(a)$ et $f_c(b)$ alors elle prend toutes les valeurs entre les deux? » b) Si f_c était définie sur **R** à la place de **Q**, est-ce que cela ferait une différence?

Nous avons présenté en Bergé (2010) l'analyse des réponses aux questions 1 et 3. Nonobstant les limites de ce questionnaire, nous concluions alors que la majorité des étudiants considéraient la limite de la suite mentionnée dans la question 1 comme étant évidente, comme allant de soi. Quant à la perception de la complétude de □ (question 3), tel que mentionné plus haut, elle était exprimée par des expressions non-opérationnelles (une vision naturelle, une mention à la représentation sur la droite numérique, une utilisation du sens courant du mot complet, absence de « trous ») par la plupart des étudiants du cours III. Au cours IV, la majorité des étudiants a utilisé des énoncés mathématiques pour l'exprimer. Nous présentons ici l'analyse correspondant à la question 2, qui n'avait pas été analysée auparavant.

La question supplémentaire à la question 2, adressée aux étudiants du cours II, demandant des ensembles possédant et ne possédant pas un supremum a été posée essentiellement pour nous assurer de la pertinence de considérer les réponses à la question 2. Les réponses à la question 2 peuvent montrer dans quelle mesure les étudiants ont de connaissances du supremum : quels usages du supremum les étudiants ont « à leur portée » s'ils l'identifient dans les théorèmes qu'il permet de démontrer, s'ils l'identifient comme outil dans la détermination de nombres, s'ils l'identifient comme faisant partie de la définition de la complétude.

VISION DES ÉTUDIANTS SUR LE SUPREMUM

La totalité des étudiants du cours II a donné des réponses correctes à la question supplémentaire. Après la lecture de toutes les réponses à la question 2, nous avons trouvé une certaine régularité qui nous a permis de les classer dans les cinq catégories suivantes :

Majoration

Il s'agit de réponses dont on manifeste que l'utilité du supremum est celle de borner. Le supremum est donc vu comme une borne supérieure ordinaire. Des exemples de réponse sont :

> « C'est très utile, car cela m'indique si un ensemble est borné ou pas »;
>
> « L'idée de supremum, je la rapporte à celle de majorant. Le fait de savoir que s est le supremum me dit que n'importe quel $x \in$ à l'ensemble, il est plus petit que s et par conséquent je sais que l'ensemble est majoré par s »;
>
> « Si une fonction ou un ensemble ont un supremum, on peut dire qu'ils sont majorés »;

« Si je sais qu'un ensemble a un supremum, alors je sais que les éléments de l'ensemble ne seront pas plus grands que le supremum. Cela peut être utile pour majorer ».

« Le supremum est utile pour pouvoir affirmer que tout élément appartenant à un ensemble A est plus petit ou égal au supremum de A »

Ces étudiants ne voient pas dans le supremum une autre fonction que celle d'être un majorant.

Absence de réponse

Nous avons groupé dans cette catégorie l'absence de réponse ainsi que les réponses manifestant que le supremum n'a aucune utilité ou manifestant ne pas connaître d'utilité. Nous avons inclus dans cette catégorie aussi des réponses se limitant à réécrire la définition de supremum. Des exemples :

« La notion de supremum ne m'a pas été utile, sauf pour les exercices dont on me demandait de le trouver »;

« Je ne vois pas d'utilité. C'est peut-être un concept qu'il faut connaitre. Il a peut-être une utilité que je ne connais pas »;

« La notion de limite me semble très utile. Celle de supremum, je ne sais pas »

« L'utilité que je vois c'est d'être le plus petit majorant ».

Présence dans une démonstration non spécifiée

Ce sont des réponses affirmant que le supremum est utilisé dans plusieurs démonstrations de théorèmes sans les préciser :

« Les supremums, on les utilise pour démonter des théorèmes »;

« Je me souviens que nous l'avons utilisé à plusieurs reprises dans des démonstrations »;

« Il est très utile pour certaines démonstrations mathématiques et il peut être utile pour prédire un majorant en équations de la physique ».

« Partant de l'axiome de supremum on a déduit plusieurs propriétés, spécialement de suites, qui ont été la base du cours. C'est très utile »

Ces étudiants ont le souvenir d'avoir « vu passer le supremum» dans une démonstration sans pouvoir l'identifier.

Réponses erronées

« Ça sert à définir des ensembles ouverts et fermés ».

« Ça sert à introduire les limites ».

Utilisation dans des démonstrations spécifiques, définition des réels

Ce sont des réponses qui reconnaissent une utilité spécifique du supremum, soit afin de définir la complétude ou de déterminer un nombre, soit dans la démonstration d'un résultat qui est nommé. Des exemples de ce groupe de réponses sont :

« Pour démontrer qu'une suite majorée non décroissante a une limite » ;

« Afin de définir la complétude de **R** » ;

« Il est important pour démontrer le théorème de Bolzano »;

« Avec la notion de supremum nous pouvons formaliser des idées intuitives comme celle que nous venons de voir [il fait référence à la question 1]. Elle permet aussi de donner une première présentation des réels avec ses 14 axiomes. L'axiome de supremum permet de distinguer entre **R** et **Q**. D'autre part, elle est nécessaire pour démontrer la plupart (selon ce que je crois) des théorèmes d'analyse » ;

« Il sert à prouver la propriété des intervalles emboîtés et qu'une suite de Cauchy est convergente» ;

« Il sert à démontrer des résultats comme celui de la question 1 ou comme le théorème de Bolzano ».

Ces étudiants reconnaissent une utilité du supremum liée à la complétude afin de définir l'ensemble **R** ou afin de l'utiliser dans la justification de propriétés requérant de la complétude pour être démontrés. Nous pourrions dire qu'ils identifient le supremum dans son rôle d'*outil explicite*, dans le sens de Douady (1986).

Tableau 1 : réponses des étudiants à la question « D'après toi, quelle est l'utilité ou l'intérêt de la notion de supremum? »

Catégories	**Cours II, sur 124**	**Cours III, sur 11**	**Cours IV, sur 10**
1) Majoration	72 (58 %)	2 (18%)	1 (10%)
2) Absence de réponse	19 (15 %)	1 (9%)	0
3) Présence dans une démonstration non spécifiée	16 (13%)	1 (9%)	0
4) Réponses erronées	10 (8 %)	1 (9%)	0
5) Utilisation dans des démonstrations spécifiques, définition des réels	7 (6 %)	6 (55%)	9 (90%)

DISCUSSION ET CONCLUSIONS

Nous voulions savoir dans quelle mesure des étudiants, à qui on a présenté la complétude à travers l'existence du supremum de sous-ensembles non vides et majorés, reconnaissent une utilité au supremum en l'identifiant comme outil explicite. La question analysée, malgré ses limites (car en fait nous n'avions pas posé aux étudiants des situations à résoudre) nous permet d'obtenir quelques conclusions.

La notion de supremum, pour la majorité des étudiants du cours II ne semble pas avoir d'utilité reconnue ou a l'utilité d'un majorant ordinaire. La principale tâche que les étudiants ont accomplie concernant le supremum dans ce cours a été de le trouver pour quelques ensembles (notamment des intervalles, des unions de quelques intervalles ou des ensembles définis par les valeurs qu'une suite prend). Il n'est donc pas surprenant que dans ce cours le supremum soit vu par la majorité des étudiants comme un majorant tout simplement. Les étudiants ont vu le professeur utiliser le supremum pour déterminer l'existence de la limite d'une suite non décroissante et majorée, mais étant appelés à expliquer ce fait, le résultat semble pour eux aller de soi (Bergé 2010) et seulement 6% des étudiants de ce cours peuvent identifier le supremum dans l'écriture de preuves spécifiques ou dans la définition de **R**. Pendant que le supremum fait partie indispensable du texte du professeur pour s'assurer de pouvoir écrire des démonstrations, les étudiants n'ont qu'à accomplir des tâches où le caractère d'outil du supremum n'est pas déployé. Un changement majeur se produit quand les étudiants rencontrent le supremum dans la définition ou la détermination de nombres comme c'est le cas aux cours III et IV. En effet, la majorité des étudiants du cours III et la quasi-totalité de ceux du cours IV peuvent nommer différents situations de fonctionnement du supremum dans son rôle d'outil et dans son rôle d'objet. Douady affirmait que *du point de vue mathématique, les problèmes mettent rarement en œuvre les caractères essentiels des notions, ceux qui en justifient scientifiquement l'emploi* (Douady, 1986, p.12). Peut-on penser à une introduction du supremum mettant en œuvre le caractère essentiel de cette notion? Pour cela il faut, nous semble-t-il, confectionner des situations qui sortent du numérique et intègrent les fonctions et les suites; des situations, en somme, reprenant des conditions similaires ou équivalentes à celles qui ont motivé l'émergence de la définition de la complétude.

Nous faisons l'hypothèse que si le caractère d'outil de la complétude (qu'elle soit définie par l'existence du supremum ou par d'autres voies) n'est pas intégré dans les organisations mathématiques prévues pour l'apprentissage des nombres réels qui l'incluent, les étudiants continueront à ne pas la reconnaitre, au-delà de la présence du supremum dans les tâches à accomplir.

BIBLIOGRAPHIE

Artigue, M. (1991). Épistémologie et didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 10/2.3 241-285

Artigue, M. (1995). The role of epistemology in the analysis of teaching/learning relationships in mathematics education. In Y. M. Pothier (Ed.), Proceedings of the 1995 annual meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group (pp. 7-21). Ontario: University of Western Ontario.

Bergé, A. et Sessa, C. (2003). Completitud y continuidad revisadas a través de 23 siglos. Aportes a una investigación didáctica. *Revista Latinoamericana en Matemática Educativa*, 6/3, 163-197.

Bergé, A. (2008). The completeness property of the set of real numbers in the transition from calculus to analysis. *Educational Studies in Mathematics* 67 (3) 217-235.

Bergé, A. (2010). Students' perceptions of the Completeness Property of the Set of Real Numbers. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, Vol 41 (2), 217-227.

Bills, L. et Tall, D. (1998). Operable Definitions in Advanced Mathematics : The Case of the Least Upper Bound. *Proceedings of PME 22* Stellenbosch, South Africa, 2, 104-111.

Cauchy, A-L. (1944). *Curso de Análisis.* (Traduction de Jimenez, C.A.). México: Colección MATHEMA, UNAM. (Version originale publiée en 1821)

Chevallard, Y. (1998). Analyse des pratiques enseignantes et Didactique des Mathématiques: l'approche anthropologique. En Actes de l'École d'été de la Rochelle, 91-118

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 19(2), 221-266.

Chellougui, F. (2006). La quantification dans l'enseignement secondaire/supérieur- étude de cas: la notion de borne supérieure, dans Rouchier, R et al (ed.) *Actes de la XIIIème École d'Été de Didactique des Mathématiques,* 1-8. Cédérom. La Pensée Sauvage.

De Gandt, F. (1988). Matemáticas y realidad física en el siglo XVII (de la velocidad de Galileo a las fluxiones de Newton) en François Guénard et Gilbert Lelièvre (eds.) *Pensar la matemática*, Tusquets editores, 43-74.

De Gandt, F. (1990). El estilo matemático de los Principia de Newton. *Mathesis*, Vol 6, n° 2, 163-189.

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 7(2) 5-31.

Durand-Guerrier (2012). Sur la question du nombre et du continu dans les apprentissages mathématiques, dans M. Ouelbani (ed.) *Des mathématiques à la philosophie. Regards croisés : didactique, Histoire, Philosophie,* Université de Tunis.

Jarník, V. (1981). Bolzano and the foundations of mathematical analysis. Sous la direction de Jarník, V, Novák, J, Folta, J; Jarník, J On the occasion of the bicentennial of Bernard Bolzano, 82-86. Prague: Society of czechoslovak mathematicians and physicists.

Van Roostelar, B. (1962). "Bolzano's Theory of Real Numbers". *Archive for History of Exact Sciences*. Vol 2, 168-180.