Comparaison entre l'évolution historique ayant mené aux développements limités et leur pratique d'enseignement au début de l'université : Entre syntaxe et sémantique

Rahim Kouki[1], Fatma Belhaj Amor[2] et Yassine Hachaichi[3]

Université de Tunis El Manar, Institut Préparatoire aux Etudes d'Ingénieurs El Manar, rahim.kouki@gmail.com

Ce texte vise à présenter les résultats d'une étude épistémologique préalable sur l'enseignement et l'apprentissage des développements limités au début de l'université. Deux analyses didactiques y sont menées : l'une, de nature historico-épistémologique porte sur l'évolution mathématique des dimensions sémantique, syntaxique et sémiotique ; et l'autre, institutionnelle, est consacrée à l'exploration des programmes, des manuels et des polycopiés de cours pour en décrypter les visées et les caractéristiques didactiques.

Les principaux résultats dégagés invitent à privilégier didactiquement les approches de modélisation ainsi que la construction via la dialectique outil/objet du concept de développement limité.

Keywords: développements limités, sémantique, syntaxe, sémiotique.

OBJET ET CADRE DE LA RECHERCHE

L'une des principales raisons qui nous a amenés à conduire cette étude réside dans le fait que la plupart des recherches didactiques conduites au niveau de la transition lycée/université ont rarement traité d'une façon explicite l'enseignement et l'apprentissage du concept de développement limité même si elles ont mentionné la pertinence de cet objet comme étant un outil très puissant dans plusieurs domaines d'application comme le calcul de limite et l'étude locale d'une fonction, la modélisation mathématique, l'étude de phénomènes physiques etc. (cf. Ghedamsi, (2008) &Praslon, (2000)).

Notre étude n'est pas totalement indépendante des ces recherches qui ont été généralement centrées sur les difficultés du passage de l'analyse algébriste à l'analyse formelle Artigue (1998), Bloch (2012) et Ghedamsi (2008).

En effet, Bloch (2012) a montré l'existence des ruptures dues à ce passage qu'elle a interprété comme un 'saut conceptuel' et qui est interprété par Haddad (2012) comme un manque de collaboration entre les niveaux d'enseignement secondaire versus supérieur ce qui a mis en évidence une complexité dans l'élaboration des nouveaux concepts au début de l'université.

Les outils d'analyse didactique adoptés tout au long de nos investigations épistémologiques et didactiques font référence d'une part, à la sémantique logique et en particulier aux dimensions sémantique / syntaxique développées dans les travaux de Durand-Guerrier (1996), Bloch & Gibel (2011) et Kouki & Ghedamsi (2012), aussi bien à la fin du secondaire qu'au début de l'université, et qui ont montré la pertinence de la prise en compte de ces dimensions dans les analyses didactiques.

D'autre part, notre étude s'est appuyée sur les résultats de plusieurs travaux didactiques dans le domaine de l'enseignement de l'analyse réelle comme ceux de Hitt (2004) et Haddad (2012) qui ont aussi montré l'apport que présente l'étude en termes de registres de représentations sémiotiques d'un objet mathématique au sens de Duval (1993).

Nous avons choisi de faire appel au jeu de cadres et en particulier à la dialectique outil / objet développée par Douady (1984, 1986), puisque nous faisons l'hypothèse que la dimension objet du développement limité mérite d'être mieux explicitée au niveau du processus de sa transposition didactique.

Dans un premier temps, nous délimitons le contour de l'objet développement limité à travers une analyse historico-épistémologique par une étude des différents types de techniques qui contribué à l'élaboration et par la suite à la genèse de cet objet de savoir.

Dans un deuxième temps, nous présentons les principaux résultats d'une étude didactique du programme officiel, de manuels et de polycopiés de cours en vue de confronter les différentes dimensions de l'objet développement limité comme savoir avec celles qui sont employées lors de son enseignement.

GENESE DES DEVELOPPEMENTS LIMITES

Nous rejoignons le point de vue de Sierpinska (1989) qui pense qu'il faut s'intéresser à l'histoire et l'épistémologie d'un concept mathématique qui nous permet de connaître convenablement son intérêt comme un savoir à enseigner. En effet, elle explique que:

« *L'analyse épistémologique sert avant tout à comprendre (nous le soulignons) les concepts mathématiques dont l'enseignement nous intéresse. [...] Comprendre un concept, c'est aussi savoir pourquoi et quand il est devenu important ou fondamental en mathématiques.*» (Sierpinska, 1989)

Nous focaliserons notre étude sur les moments importants de l'évolution du concept de développement limité par la présentation, ainsi que par l'interprétation, des différentes méthodes élaborées et développées par les mathématiciens des différentes civilisations du début du XVIIe siècle jusqu'à la fin du XIXe siècle, qui ont marqué l'évolution des concepts qui sont en étroite liaison avec notre objet d'étude et ce, par la prise en compte des différentes dimensions d'analyse adoptées ci-dessus.

Au XVIIe siècle, les vitesses, les quadratures, les tangentes, maxima et minima sont les aspects des problèmes de différentiations dont l'approche géométrique est l'approche la plus dominante chez les mathématiciens et les physiciens. En effet, Bourbaki (1984) écrit que:

« *Ces quadratures font l'objet de nombreux travaux, de Grégoire de Saint-Vincent, Huygens, Wallis, Gregory; le premier croit effectuer la quadrature du cercle, le dernier croit démontrer la transcendance de e; chez les uns et les autres se développent des procédés d'approximation indéfinie des fonctions circulaires et logarithmiques, les uns de tendance théorique, d'autres orientés vers le calcul numérique, qui vont aboutir bientôt, avec Newton, Mercator, (...), J.Gregory, puis Leibniz, à des méthodes générales de développement en série.*» (Bourbaki, 1984, p.226)

Tout au long de cette période l'approche géométrique est l'approche la plus dominante. En effet, Fermat, Descartes, Wallis, Newton et Leibniz se sont appuyés essentiellement sur l'approximation, au cours de leurs études du «problème des tangentes». Certains d'entre eux ont élaboré les deux premiers termes du développement de Taylor. Ils se sont intéressés aussi à la méthode cinématique.

Taton (2004) explique cette méthode est

«*…équivalente à notre méthode élémentaire de détermination de la tangente à une courbe définie paramétriquement.*» (Taton, 2004)

Dahan et Peiffer (1986) ont détaillé «le problème des tangentes» par la mise en valeur des travaux de Torricelli, Roberval, Descartes, Fermat et Barrow. Ce dernier

«…est le premier à reconnaître clairement que le problème des tangentes est l'inverse du problème des quadratures, et vice versa. Aucun de ces auteurs n'a reconnu la généralité et l'importance du lien qui fait aujourd'hui l'objet du théorème fondamental du calcul différentiel et intégral.» (Dahan et Peiffer, 1986, p.188)

Le statut de l'objet mathématique «tangente» prend son étendue la première fois dans les travaux de Torricelli et Roberval où

«*… les problèmes de quadrature ont une origine très ancienne, les tangentes ne seront étudiée qu'au milieu du XVIIe siècle(...) La méthode élaborée par Archimède pour construire la tangente à la spirale se nourrit de considérations cinématiques. Elle a été étendue, au XVIIe siècle, dans les travaux de Torricelli et dans ceux de Roberval sur le mouvement des trajectoires.*» (Ibid., p.185)

Au début du XVIIe siècle, l'objet développement limité est connu par la notion de développement en séries infinies dans le calcul infinitésimal. Sa genèse est due à certains problèmes physico- mathématiques.

Dans un premier temps, la résolution du «problème des tangentes» au début du XVIIe siècle, ramène à la genèse du statut objet de «la tangente» par la détermination de son équation par une méthode dynamique développée par Torricelli et Roberval à partir du concept de vitesse et des mouvements d'une part, et d'une méthode géométrique (ou la détermination des premiers termes de développement de Taylor) par Fermat, Descartes et Barrow, d'autre part.

« *Torricelli et Roberval considèrent les courbes engendrées par la composition de deux mouvements, dont on connaît les vitesses. La vitesse résultante sera la diagonale du parallélogramme des vitesses des deux mouvements qui engendrent la courbe. La droite ayant la direction de la diagonale sera la tangente à la courbe au point P. Cette méthode dynamique permet de déterminer les tangentes à beaucoup de courbes, mais la définition de la tangente qui y opère repose sur des concepts physiques et n'est pas applicable à toutes les courbes.* » (Taton, 2004, p.185-186)

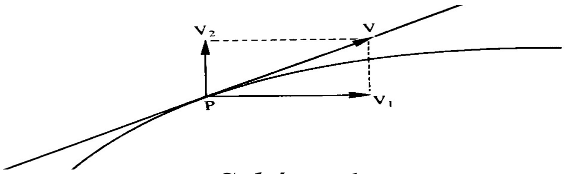

Schéma 1

Ceci nous permet de dire que la démarche développée dans la recherche de l'équation d'une tangente est du type graphique et algébrique articulant les dimensions sémantique et syntaxique dans le cadre de la géométrie.

Le deuxième temps de la genèse de notre objet d'étude s'est réalisé par la détermination de développements en séries infinies (des cas particuliers de sinus, cosinus, tangente et logarithme ($Ln(1+x)$) qui s'est effectuée par des techniques géométriques développées par Mercator et Leibniz en articulant les dimensions sémantique et syntaxique relativement aux registres algébrique, géométrique et graphique.

«*Nicolas Marcator (...) Dans sa Lograthmotechnia, publié à Londres en 1668, il trouve l'aire de l'hyperbole en réduisant d'abord en série géométrique, puis en intégrant terme à terme suivant la méthode de Wallis. Ce dernier trouvait d'ailleurs la même année des résultats analogues qu'il publiait en 1670. La méthode a un succès foudroyant et, en quelques années, James Gregory, Newton, Leibniz s'y distinguent.*» (Taton, 1961, p.239)

Il parvient ainsi à la formule connue par son nom qui est :

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots \text{ et } \int_0^x \frac{dt}{1+t} dt = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots.$$

De son côté, Newton a trouvé les mêmes développements en séries infinies, indépendamment de Leibniz, à partir de l'utilisation de sa méthode cinématique «les vitesses des mouvements». Ainsi, la figure prend une place importante pour la genèse des développements en séries infinies qui sont connus de nos jours par les développements limités usuels avec une absence du reste.

Dans le traitement des problèmes de la mécanique céleste, Newton a utilisé comme technique la méthode de Wallis pour découvrir son développement du binôme qui est connue, de nos jours, par la formule du binôme de Newton.

Il a utilisé son développement du binôme comme une technique préférée pour le calcul de certains cas particuliers des développements en séries en posant :

$P = c^2$ et $Q = \frac{x^2}{c^2}$ où $m = 1$ et $n = 2$

$$(c^2 + x^2)^{\frac{1}{2}} = c + \frac{1}{2} c.\frac{x^2}{c^2} + \frac{1.(-1)}{2.4} c(\frac{x^2}{c^2})^2 + \frac{1.(-1).(-3)}{2.4.6} c(\frac{x^2}{c^2})^3 + ... = c + \frac{x^2}{2c} - \frac{x^4}{8c^3} + \frac{x^6}{10c^5} - ...$$

puis il obtient $\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + \frac{x^6}{16} - \frac{x^8}{128} + ...$ pour $c = 1$.

Le troisième moment se réalise par la détermination de développements en séries infinies d'une fonction quelconque, même avant l'apparition de cette dernière notion, qui est connue la première fois sous la formule connue de Gregory-Newton. Tandis que, la formule de Taylor est due à la méthode d'intégration par parties de John Bernoulli puis par la méthode «des différences finies» de Taylor qui nécessite une mobilisation du registre de l'analyse. Dans cette époque, la formule de Taylor devient un outil puissant pour résoudre certains problèmes physico-mathématiques et surtout pour les calculs des approximations. Comme Taylor n'a pas étudié rigoureusement le reste de sa formule, Maclaurin, Euler et Lagrange se sont intéressés à refaire cette formule par leurs méthodes analytique au XVIIIe siècle. Lagrange renforce la confiance en cette formule par son approche numérique en utilisant «la théorie des séries» pour déterminer des valeurs approchées d'un transcendant. Ce qui montre bien la pertinence de l'articulation des différents registres numérique, analytique et algébrique dans le cadre de l'analyse, et confirme la nécessité de la prise en compte des dimensions sémantique et syntaxique dans le traitement des objets mathématiques.

La rigueur en mathématiques s'organise par la genèse du concept de «limite» et c'est d'Alembert qui a donné un nouvel aspect à l'analyse. De ce fait, Cauchy, le père de la rigueur, refait les démonstrations des différentes écritures de la formule de Taylor par une étude de sa convergence. De même, Abel a étudié rigoureusement la formule du binôme de Newton.

Dans une dernière étape de sa formulation historique, le développement limité d'une fonction au voisinage d'un réel issu de la formule de Taylor est devenue un cas particulier du développement asymptotique développé par Poincaré en 1886.

Après ce bref récit des principales étapes historiques, nous résumons ci-dessous les différentes phases avec les caractéristiques des différentes techniques :

Méthode	Période	Type de technique
La détermination de la tangente et les deux premiers termes du développement limité	Début du XVIIe	Technique dynamique (Torricelli et Roberval). Technique analytique et géométrique des sous tangentes de (Fermat, 1637) Technique des extrema des deux premiers termes du développement de Taylor actuel (Fermat, 1637-1638) Technique d'approximation géométrique des courbes algébriques (Descartes, 1638) Technique géométrico-algébrique (Isaac Barrow)
Les cas particuliers de développements en séries infinies	A partir de 1665	Technique géométrique Mercator (1668) Techniques de Newton Techniques de Leibniz
Le développement en séries infinies d'une fonction quelconque et la formule de Taylor	Fin du XVIIe	Technique algébrique de Newton Techniques de détermination du développement de Taylor
L'étude rigoureuse de la formule de Taylor et la formule du binôme de Newton	1823 1826	Techniques analytiques des différentes écritures de la formule de Taylor (Cauchy, 1823) Technique algébrique (Abel, 1826)
Développement asymptotique de Poincaré (1886)	1886	Techniques analytiques de la détermination des développements limités et asymptotiques

Table 1: Les principales phases de la genèse des développements limités

Au cours de la formulation du concept de développement limité d'une fonction d'une variable réelle, les mathématiciens ont exploité différentes techniques dans différents cadres et registres algébrique, analytique, graphique, numérique et géométrique en articulant les dimensions sémantiques et syntaxiques qui joignaient les courbes aux tangentes aux équations en passant du numérique au graphique à l'algébrique et à l'analytique etc.

L'approche géométrique a pris une place importante dans l'étude des premiers termes da la formule de Taylor et dans la détermination des développements en séries infinies (développements limités usuels). Nous pouvons ainsi dire que dans cette période, ces mathématiciens articulaient les deux dimensions sémantique dans l'interprétation graphique et syntaxique dans la manipulation des différentes techniques du calcul formel et algébrique (équations, expressions analytiques).

On ne peut pas parler du concept de développement limité sans faire retour sur les relations de comparaison de fonctions via la notion d'équivalence et de négligeabilité qui est en étroite liaison avec le théorème fondamentale de l'analyse qui suppose que si $f = o(g)$ au voisinage d'un point a on a la même relation entre leurs primitives nulles en a. En effet, Bourbaki confirme que sa genèse est due à

«*...P. du Bois-Reymond [94 a et b] qui, le premier, aborda systématiquement les problèmes de comparaison des fonctions au voisinage d'un point, et, dans des travaux très originaux, reconnut le caractère «non archimédien » des échelles de comparaison, en même temps qu'il étudiait de façon générale l'intégration et la dérivation des relations de comparaison, et en tirait une foule de conséquences intéressantes [94 b]. Ses démonstrations manquent toutefois de clarté et de rigueur, et c'est à G. H. Hardy [147] que revient la présentation correcte des résultats de du Bois-Reymond: sa contribution principale a consisté à reconnaître et démontrer l'existence d'un ensemble de « fonctions élémentaires », les fonctions (H), où les opérations usuelles de l'Analyse (notamment la dérivation) sont applicables aux relations de comparaison.*» (Bourbaki, 1984, p.254)

L'étude historique nous a permit de repérer les différentes écritures symboliques du type syntaxiques, utilisées dès la genèse du concept de développement limité, dans les divers problèmes développés traitant des situations du domaine de la physique et celui des mathématiques.

Nous allons conduire une analyse des programmes, des manuels, des polycopiés de cours et des résultats d'une enquête auprès des enseignants qui pourrait nous permettre de saisir les conditions de diffusion de ce domaine de savoir de l'analyse réelle à l'échelle de l'université.

ETUDE DES PROGRAMMES, DES MANUELS ET DES POLYCOPIES DE COURS

Nous avons choisi d'étudier la transposition des développements limités dans les programmes et les manuels de la première année de l'enseignement universitaire et plus précisément au niveau des classes préparatoires section mathématiques et physiques. Nous les supposons un lieu idéal de l'enseignement des mathématiques en général et des développements limités en particulier puisqu'elles sont supposées enseigner des mathématiques fondamentales et appliquées afin de donner une formation théorique et pratique la plus adéquate aux futurs ingénieurs qui auront à modéliser dans des domaines articulant les mathématique et la réalité.

L'étude des recommandations générales du programme tunisien de l'analyse réelle montre qu'elles articulaient les dimensions sémantique et syntaxique dans différents registres analytique, algébrique, graphique, géométrique et numérique. En revanche dans le contexte lié au concept de développement limité, il y a une absence de l'exploitation de la dimension sémantique au niveau du statut objet des développements limités d'une part, et de la mobilisation du calcul numérique et du graphique, d'autre part.

DL à l'ordre n d'une fonction au voisinage d'un point. Opérations algébriques sur les DL : Somme, produit; développement limité de $u \to \dfrac{1}{1-u}$, application au quotient. Existence d'un DL à l'ordre k pour une application de classe C^k : formule de Taylor-Young.	Les étudiants doivent savoir déterminer sur des exemples simples le DL d'une fonction composée. Aucun résultat général sur ce point n'est exigible des étudiants. Les développements asymptotiques sont à étudier sur quelques exemples simples. Toute étude systématique est exclue ; en particulier la notion générale d'échelle de comparaison est hors programme. Il convient de donner un exemple où f admet un DL à l'ordre 2 en un point sans être deux fois dérivable en ce point.

Table 2 : Contenu du programme relatif à l'enseignement des développements limités

En ce qui concerne les quatre manuels [1] et les trois polycopiés de cours [2] analysés, nous remarquons qu'ils suivent une même stratégie «de type magistral» dans l'enseignement des développements limités, où ils commencent par une présentation théorique de cet «objet» purement syntaxique à partir de définitions, propriétés et théorèmes dans un registre analytique. Puis ils passent directement au statut «outil» purement analytique en l'utilisant dans le calcul de limite, l'étude locale d'une fonction (que ce soit au voisinage d'un point ou au voisinage de l'infini), utilisation d'outil dans lequel ils articulent les deux dimensions sémantiques et syntaxiques par la mobilisation des registres analytique, algébrique et géométrique.

En revanche, la place de la figure géométrique pour justifier l'intérêt des développements limités comme modèle d'outil (de technique) d'approximation locale graphique et numérique d'une fonction méritent d'être mieux explicités : elles sont presque absentes dans les différents supports de cours analysés.

Ces résultats d'analyse mettent en question la divergence entre l'évolution historique qui a mis en lumière l'objet développement limité avec les différentes techniques décrites, et celle des techniques recommandées et enseignées actuellement.

En effet, les statuts «outil» et «objet» du développement limité s'articulaient tout au long de sa genèse dans différents registres (analytique, algébrique, numérique, géométrique et graphique). En revanche, l'analyse du processus de transposition de ce savoir montre l'absence d'un travail au niveau des registres graphique et numérique.

CONCLUSION

Les analyses didactiques ont montré que la genèse historique développements limités est étroitement liée aux différents cadres et registres de représentations sémiotiques et qu'il y avait une dialectique dynamique entre les statuts outil et objet du concept de développement limités et des différents concepts qui sont en étroite liaison avec ce concept mathématique. Ceci a permis aux différents mathématiciens d'avancer sur leur recherche et leur mise d'un nouvel objet qui par la suite est devenu un outil fondamental dans le calcul d'approximation locale aussi bien en mathématiques que dans les domaines de la physique, de la mécanique etc. En revanche, du côté institutionnel, la pertinence de la prise en compte de l'articulation entre les points de vue sémantique et syntaxique qui n'est pas prise en compte aussi bien par les programmes que par les manuels de cours. Le travail numérique et le travail graphique, permettant de montrer la pertinence de ce concept surtout pour la formation des futurs ingénieurs méritent d'être mieux explicité.

Une étude articulant les éléments de notre réflexion en didactique, et principalement en matière de raisonnement mathématique, avec les pratiques enseignantes pourrait nous renseigner davantage sur les priorités des apprentissages, les manques ainsi que les opportunités qui pourraient s'offrir dans le cadre d'une réflexion sur l'apprentissage des approximations locales et développements limités à l'université.

NOTES

1. Deux manuels français et deux manuels Tunisiens.

2. Des polycopiés de cours de trois instituts préparatoires aux études d'ingénieurs en Tunisie.

REFERENCES

Artigue M. (1998) L'évolution des problématiques en didactique de l'Analyse. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 18(2), La Pensée Sauvage, Grenoble.

Bloch I., Gibel P. (2011) Un modèle d'analyse des raisonnements dans les situations didactiques : étude des niveaux de preuves dans une situation d'enseignement de la notion de limite, *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 31(2), 191-228.

Bloch I. (2012) Rôle et statut des savoirs dans la pratique mathématique : l'exemple d'un basculement épistémologique dans l'enseignement de l'analyse, Actes de colloque EMF 2012, 392-403.

Bourbaki N. (1984) Eléments d'histoire des mathématiques, Masson, Paris.

Dahan-Dahmedico A., Peiffer J. (1986) Une histoire des mathématiques : Routes et dédales. Paris : Seuil.

Douady R. (1984) Jeux de cadres et Dialectique outil-objet. Thèse d'état : Université Paris 7.

Douady R. (1986) Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 5-31.

Durand-Guerrier V. (1996) Logique et raisonnement mathématique. Défense et illustration de la pertinence du calcul des prédicats pour une approche didactique des difficultés liées à l'implication. Thèse de doctorat : Université Lyon1.

Duval R. (1993) Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, 37-65.

Ghedamsi I. (2008) Enseignement du début de l'analyse réelle à l'entrée à l'université : Articuler contrôles pragmatique et formel dans des situations à dimension a-didactique. Thèse de doctorat. Université Bordeaux 2.

Haddad S. (2012) L'enseignement de l'intégrale en classe de terminale l'enseignement tunisien. Thèse de doctorat. Université Paris 7.

Hitt F. (2004) Les représentations sémiotiques dans l'apprentissage de concepts mathématiques et leur rôle dans une démarche heuristique, *Revue des sciences de l'éducation*, 30(2), 329-354.

Kouki R., Ghedamsi I. (2012) Limite des méthodes syntaxiques en algèbre du secondaire, In Dorier J-L., Coutat S . (Eds.) Enseignement des mathématique et contrat social : enjeux et défis pour le 21ème siècle - Actes du Colloque EMF 2012. 435-444.

Praslon F. (2000) Continuités et ruptures dans la transition terminale S/DEUG Sciences en analyse. Le cas de la notion dérivée et son environnement. *Publications mathématiques et informatiques de Rennes* 3, 1-27.

Sierspinka A. (1989).Quelques idées sur la méthodologie de la recherche en didactique des mathématiques liées à la notion d'obstacle épistémologique, *Cahier de Didactique des Mathématiques*, 7, 85-86.

Taton R. (1961) Histoire générale des sciences: La science contemporaine- Le XIXe siècle v 3. Paris.

Taton R. (2004) Calcul infinitésimal- Histoire, Encyclopædia Universalis, v 10.