Quelle synergie entre mathématiques et physique au sein de l'enseignement universitaire ?

Michel ROLAND

Université Catholique de Louvain-la-Neuve (UCL), Institut de Recherche en Mathématiques et en Physique (IRMP), roland.debled@skynet.be, michel.roland@student.uclouvain.be, Belgique.

Pour qu'une interdisciplinarité physico-mathématique trouve sa place au lycée, il est souhaitable que son utilité soit démontrée et exploitée lors du parcours du futur enseignant. Or nous constatons, à partir d'exemples et d'enquêtes, qu'un fossé apparaît entre le cursus des mathématiciens et des physiciens. C'est pourquoi, dans cet article, sont développées des approches comparées de concepts démontrant leur complémentarité. L'exemple de la différentielle, décrit comme un obstacle à la mathématisation de la physique[1], est exploité afin de le transformer en un outil de conceptualisation offrant une approche duale des notions et de leurs applications pour une meilleure compréhension des élèves en fonction de leurs parcours.

Mots Clefs: vitesse, dérivée, différentielle, cadre, inférence.

INTRODUCTION

Historiquement, la relation entre les mathématiques et la physique fut bénéfique pour leur développement et permit l'éclosion de théories. Actuellement, la spécialisation engendre une approche différente de concepts communs par les mathématiciens, les physiciens et les ingénieurs. Cette différence se marque dans l'enseignement des mathématiques et de la physique. Au sein des universités francophones de Belgique, nous avons relevé des difficultés de communication entre professeurs. Ces difficultés engendrent la création de cours séparés de mathématique ou de physique en première année, avec un cours de mathématique assuré par un physicien et plus un mathématicien. Un cours de physique en ingénieur débute par une présentation des mathématiques utiles pour ce cours en ne renvoyant plus à celui de mathématiques. Cette différence de langages et les relations unissant ces deux disciplines sont synthétisées dans Karam et al, 2015, en voici un extrait :

> Since their beginnings in the ancient world, physics (natural philosophy) and mathematics have been deeply interrelated, and this mutual influence has played an essential role in both their developments as illustrated in the quotations above. However, the image typically found in educational contexts is often quite different. In physics education, it is usual to find mathematics being seen as a mere tool to describe and calculate, whereas in mathematics education, physics is commonly viewed as a possible context for the application of mathematical concepts that were previously defined abstractly. This dichotomy creates significant learning problems for the students…This problem demands

[1] Karam and others (2015)

> a systematic research effort from experts in different fields, especially the ones who aim at informing educational practices by reflecting on historical, philosophical and sociological aspects of scientific knowledge.

En outre, fin des années 90, des études se sont penchées sur la désaffection des étudiants pour les études scientifiques dont les mathématiques et la physique. Elles préconisent une modification dans l'enseignement des sciences dont un décloisonnement des disciplines, souhaité en mai 2006 dans un rapport appelé rapport Rolland. Ne serait-il pas temps de tenter un rapprochement entre les deux disciplines et également d'unir leurs atouts respectifs?

Cet article se situe dans la droite ligne de notre recherche sur l'interdisciplinarité physico-mathématique et les obstacles à sa mise en œuvre au Lycée. Comment promouvoir une interdisciplinarité si les enseignants censés l'appliquer n'y ont pas été sensibilisés lors de leur formation universitaire ?

Étudions la mise en place de pistes associant pour chaque obstacle un objectif de dépassement montrant la plus value du recours à l'interdisciplinarité, un objectif-obstacle (Martinand, 1986). Nous avons recours à des dualités possibles entre approche de physiciens ou de mathématiciens, pour la mécanique et l'analyse, fournissant deux chemins pour introduire des concepts ou résoudre des problèmes, évitant en cas d'incompréhension par des élèves, la simple répétition d'une explication à partir d'un changement de cadre (Douady, 1992).

Commençons par une dualité historique autour des concepts de vitesse instantanée et de dérivée mettant en évidence un cadre algébrique et analytique. Le débat sur la notation de dérivée, lagrangienne ou leibnizienne, obstacle conceptuel ou corporatiste, est transformé en un outil pédagogique fournissant une double approche des problèmes, une dualité appliquée.

Une dualité théorique donne un éclairage sur l'inférence déductive et inductive (Barth, 1987). L'une utilisée par des mathématiciens est une réflexion partant du général ou du théorique vers le particulier ou vers une nouvelle vérité théorique; l'autre l'apanage de physiciens part d'une observation particulière pour obtenir une généralité conjecturale.

Terminons par une dualité modélisatrice. L'étude du pendule simple illustre la notion d'obstacle par l'évitement du recours aux équations différentielles ordinaires (EDO) alors même que la loi de la mécanique de Newton renvoie à un tel recours.

Finalement, les concepts clefs sont définis à la fin de cet article dans un glossaire.

DUALITÉ HISTORIQUE ET APPLIQUÉE

Dès la naissance du calcul différentiel, deux visions du concept de dérivée se développent, l'une centrée sur les rapports, inspirée de Leibniz, des Bernoulli, de Varignon,…; l'autre sur les fonctions, inspirée de Leibniz, de Lagrange, de Cauchy,…

Cette évolution donne naissance à deux courants qu'il faut éviter de mélanger sous peine d'engendrer chez les élèves et les étudiants des incompréhensions comme l'indiquait déjà Kac et Randolph (1942) :

> Granted, then, that we are not going to dispense with differentials, can we not do something to help students understand what they are? The unsophisticated undergraduate who tries to believe everything he reads and his instructor tells him is hopelessly confused. One day he tries to believe (but does not succeed) that dy/dx is not dy divided by dx. The next day he may have momentary comfort when he learns that is true after all that dy/dx is dy divided by dx and that $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$

Analysons la recherche des équations du MRUA (mouvement rectiligne uniformément accéléré) par Benson (1999) utilisé dans différents cours de physique en première année d'université en Belgique francophone.

$$\mathrm{v}_{inst} = \mathrm{v}_x(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \qquad a_{inst} = a_x(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathrm{v}_x}{\Delta t} = \frac{d\,\mathrm{v}_x}{dt}$$

$$dx = \mathrm{v}_x . dt \qquad d\,\mathrm{v}_x = a_x . dt$$

$$x_f - x_i = \int_{t_i}^{t_f} \mathrm{v}_x \, dt \qquad \mathrm{v}_{x_f} - \mathrm{v}_{x_i} = \int_{t_i}^{t_f} a_x \, dt$$

Figure 1 – Recherche des équations du MRUA, Benson

Nous sommes face à l'obstacle épistémologique décrit par Kac et Randolph. L'emploi de la limite ne permet pas de passer de la première à la deuxième ligne. La dérivée n'est pas un quotient de différentielles. Pourtant, des physiciens l'interprètent comme tel, le justifiant pour des raisons empiristes. Dans son cours, Richard Feynman (2014), prix Nobel de physique en 1965, renvoie à l'écriture observée en deuxième ligne :

> Les physiciens aiment l'écriture *ds* = *v dt*, car par *dt* ils veulent dire Δt dans des circonstances dans lesquelles il est très petit ; sachant ceci, l'expression est valable à une bonne approximation … La quantité *ds/dt* que nous venons de trouver est appelée « la dérivée de *s* par rapport à *t* (ce langage aide à garder trace de ce qui fut changé), et le processus compliqué pour la trouver est appelé prendre la dérivée ou dérivation. Les *ds* et *dt* qui apparaissent séparément sont appelés des *différentielles*.

Il n'est pas anodin de constater que Feynman utilise le terme quantité. En effet, historiquement, il se place dans le cadre défini notamment par Varignon (1698) que nous appelons **algébrique**:

> Règle générale. Des vitesses, Des temps, Des Espaces. $y = \frac{dx}{dz}$, ou $dz = \frac{dx}{y}$, ou $dx = y\,dz$.

Il s'agit d'un rapport voulu adimensionnel, afin de s'abstraire du sens physique des grandeurs, conformément à la théorie d'Euclide (Varignon, 1707) :

> Il est ici à remarquer que l'espace et le temps étant des grandeurs hétérogènes, ce n'est point proprement elles qu'on compare ensemble dans le rapport qu'on appelle vitesse, mais seulement les grandeurs homogènes qui les expriment, lesquelles sont ici, et seront

toujours dans la suite ou deux lignes, ou deux nombres, ou deux telles autres grandeurs homogènes qu'on voudra.

Cependant, le recours à la limite renvoie au cadre défini par Cauchy (1823) que nous appelons **analytique**:

> Il en sera de même en général; seulement, la forme de la fonction nouvelle qui servira de limite au rapport $\frac{f(x+i)-f(x)}{i}$ dépendra de la forme de la fonction proposée y = f(x). Pour indiquer cette dépendance, on donne à la nouvelle fonction le nom de *fonction dérivée*, et on la désigne, à l'aide d'un accent, par la notation y' ou f'(x).

Nous constatons ainsi un mélange des deux cadres par Benson. L'emploi du rapport est-il imposé pour la recherche des équations du MRUA ? A-t-on vraiment besoin de la dérivée pour cette recherche, la règle de Merton n'est-elle pas suffisante ?

Figure 2 – Règle de Merton, formalisme actuel : $v_m = \frac{v_f + v_i}{2}$

Pour garder un rapport de grandeurs, il faut définir la notion de différentielle. A quel moment l'introduire ? Comment assurer une réciprocité des objets de savoir entre le monde mathématique et le monde physique ? Qui prendra en charge l'introduction du concept permettant à l'autre d'utiliser l'outil-objet au sein de sa propre discipline? Nous entrons ici dans la théorie de l'action conjointe de Gérard Sensevy (2011).

De même, comment justifier le passage de la ligne 2 à la ligne 3 ? L'écriture x'(t)=v(t) permet une intégration des deux membres de l'égalité par rapport à t mais dans le cas dx = v dt que fait-on ? S'agit-il d'une intégration à partir de bornes différentes (en x et en t) ? Avec quel découpage ? Quelle définition de l'intégrale ?

Retrouvons-nous cette distinction d'approches dans la résolution de problèmes ?

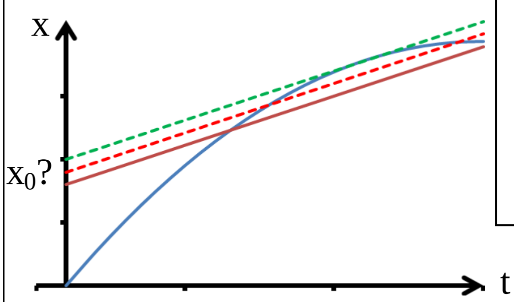
La cinématqiue se prête au changement de cadre et ses fenêtres conceptuelles (Douady, 1992). Pour de plus amples explications sur le sujet, nous invitons le lecteur à prendre connaissance de notre article dans *Épistémologie et didactique*, à paraître.

Développons brièvement un des exemples. Un problème a été soumis à 96 étudiants de première année universitaire(mathématique, physique, chimie, ingénieur civil et de gestion) (réussite 8,4%) et ensuite aux 511 élèves des olympiades de physique (réussite 16,6%). Voici le problème posé :

> Le conducteur d'un train roulant à 100 km/h aperçoit, à 85 m, sur la même voie, le fourgon d'un train roulant dans le même sens que lui, à 28 km/h. Il bloque aussitôt les freins, ce qui entraîne une décélération de 2 m/s^2. Y aura-t-il collision ? A quelle distance minimale doit être aperçu le fourgon afin d'éviter la collision ?

Une analyse des erreurs commises par les étudiants et par les 62 finalistes (réussite 33,9%) des olympiades sur un problème semblable figurera dans notre thèse.

Voici le tableau reprenant une synthèse des méthodes utilisées par les étudiants.

<table>
<tr><th>CADRE ALGÉBRIQUE</th><th>CADRE ANALYTIQUE</th></tr>
<tr><th>FC : relation algébrique</th><th>Fenêtre Conceptuelle (FC) : relation numérique</th></tr>
<tr><td>Aucune méthode de ce type pour ce problème, mais bien dans les problèmes de rencontre ou de poursuite pour le MRU, voir analyse proposée dans le cadre de notre recherche doctorale.</td><td>


Droite : fourgon
Courbe : train
x_0 : distance de séparation</td></tr>
<tr><th>FC : vitesse relative</th><th>FC: fonction numérique</th></tr>
<tr><td>Vitesse relative : $\Delta v = v_B - v_A$
Temps (vitesse relative nulle) :
$t = \frac{\Delta v}{a}$ rapport algébrique
Règle de Merton : $v_m = \frac{v_f + v_i}{2}$
Distance minimale : $x_0 = t \,.\, v_m$</td><td>$\left.\begin{aligned} x_A &= v_A.t - \frac{at^2}{2} \\ x_B &= x_0 + v_B.t \end{aligned}\right\} x_A(t) = x_B(t)$
$v_A.t - \frac{at^2}{2} = x_0 + v_B.t$
$\Leftrightarrow \frac{at^2}{2} - (V_A - V_B).t + x_0 = 0$
$\Delta = (V_A - V_B)^2 - 2.a.x_0 \Leftrightarrow t = \frac{(V_A - V_B) \pm \sqrt{\Delta}}{a} \Leftrightarrow x(t) = \ldots$
$\Delta = 0 \Leftrightarrow x_0 = \frac{(V_A - V_B)^2}{2a}$</td></tr>
</table>

L’existence d’une solution graphique est prouvée par le théorème des accroissements finis de Lagrange. Ce théorème indique également que rechercher la distance revient à rechercher le moment où les deux trains ont la même vitesse, un changement de cadre.

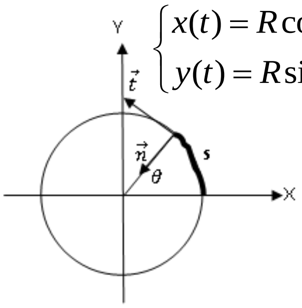
Revenons aux infiniment petits, notés dx, souvent utilisés en physique par des ingénieurs et des physiciens. N’est-il pas problématique de travailler sur ces derniers?

Référons-nous à l’étude réalisée dans les années 90 à l’Université Paris-Diderot, *Procédures différentielles dans les enseignements de mathématiques et de physique au niveau du premier cycle universitaire.* Nous y trouvons un exemple d’erreur d’analogie entre la recherche du volume d’une sphère et de sa surface par un découpage en tranches infinitésimales. Il y a un problème d’approximation lors du passage à la limite dû au paradoxe de Schwarz. Il est important de vérifier la validation de l’approximation choisie sous peine de commettre une erreur lors du passage à la limite. La surface des cylindres infinitésimaux ne tend pas vers la surface de la sphère.

DUALITÉ THÉORIQUE

Analysons un autre exemple, la recherche de la formule de l’accélération centripète.

Soit une particule tournant à une vitesse quelconque autour d’un point à une distance R. Recherchons la position à chaque instant du point sur le cercle, ensuite sa vitesse par la dérivée et finalement son accélération par la dérivée seconde.



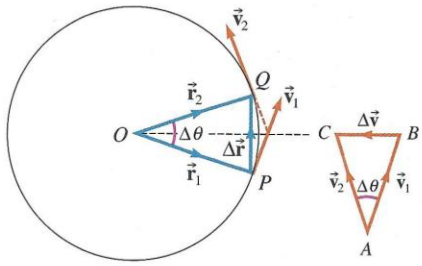
$$\begin{cases} x(t) = R\cos\theta(t) \\ y(t) = R\sin\theta(t) \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x} = -R\sin\theta\,\dot{\theta} \\ \dot{y} = R\cos\theta\,\dot{\theta} \end{cases} \quad \begin{cases} \ddot{x} = -R\cos\theta\,\dot{\theta}^2 - R\sin\theta\,\ddot{\theta} \\ \ddot{y} = -R\sin\theta\,\dot{\theta}^2 + R\cos\theta\,\ddot{\theta} \end{cases} \quad \vec{a} = R\dot{\theta}^2\,\vec{n} + R\ddot{\theta}\,\vec{t}$$

Par définition du radian: $s = R\theta \quad \vec{a} = \frac{\dot{s}^2}{R}\vec{n} + \ddot{s}\,\vec{t}$

Nous déduisons de la formule générale, le cas particulier du mouvement circulaire uniforme: $a = \frac{v^2}{R}$

Il s’agit donc d’une *inférence déductive* (Barth, 1987).

Dans l’extrait de Benson repris ci-dessous, l’auteur part du cas particulier du mouvement circulaire uniforme, par exemple, un objet tournant sur une platine, une observation :



> La figure représente une particule se déplaçant à une vitesse constante *v* sur un cercle de rayon *r*. Il s’agit d’un **mouvement circulaire uniforme**. Supposons que, durant un court intervalle de temps Δt son vecteur position tourne d’un angle $\Delta\theta$, et que le déplacement de la particule $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, soit vertical. Comme $\vec{v}$ est toujours perpendiculaire à $\vec{r}$, les directions de ces deux vecteurs varient selon le même angle durant un intervalle de temps quelconque. Sur le diagramme vectoriel de l’équation $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$, nous notons que $v_2 = v_1 = v$. La direction $\Delta\vec{v}$ est horizontale et radiale vers l’intérieur, et confondue avec la bissectrice de l’angle $\Delta\theta$ à l’intérieur du cercle. Les triangles *OPQ* et *ABC* sont deux triangles isocèles ayant les mêmes angles. (Pourquoi ?) Donc, $\frac{|\Delta\vec{r}|}{r} = \frac{|\Delta\vec{v}|}{v}$ et nous tirons que $|\Delta\vec{v}| = (\frac{v}{r})|\Delta\vec{r}|$. Puisque $|\Delta\vec{r}| \approx v\Delta t$, nous voyons que $\frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t} \approx \frac{v^2}{r}$. D’après la définition $\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0}(\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t})$, nous trouvons que le module de l’accélération centripète est $a_r = \frac{v^2}{r}$.

Benson a recours au rapport de similitude entre deux triangles semblables. Il s’agit d’un rapport adimensionnel. Il généralise ensuite en sommant les accélérations centripète et tangentielle ($a_t = \frac{dv}{dt}$), obtenant ainsi l’accélération pour un mouvement circulaire non uniforme. Il aurait dû valider cette conjecture. Il s’agit donc d’une *inférence inductive* (Barth, 1987).

En comparant les deux approches, nous constatons que l’inférence inductive utilise une démarche arbitraire de la pensée imposant une validation à posteriori.

De même pour l’inférence déductive, l’utilisation des dérivées, un passage à la limite évitant la manipulation d’ « infiniment petits », renvoie au **cadre analytique**.

Pour l’inférence inductive, l’utilisation du rapport de similitude et d’approximations (« court intervalle de temps », un infiniment petit) avant le passage à la limite renvoie au **cadre algébrique** du rapport de grandeurs, les Δ selon Feynman (2014). Cette méthode est semblable à la justification erronée du passage entre la ligne 1 et la ligne 2 de la figure 1 utilisant les Δ plutôt que les d.

DUALITÉ MODÉLISATRICE

La recherche des équations du MRUA renvoie à des équations différentielles du premier ordre avec intégration. Le danger est la mise en place d'une méthode de « séparation des variables » avec une dissimulation de la composée ou du changement de variables comme l'indiquait Poincaré (1904) et Hadamard (1923).

En 1996, un groupe de travail, composé de trois professeurs et de trois étudiants, s'est penché sur des difficultés rencontrées par les étudiants de la faculté des sciences appliquées de l'UCL à la lecture de polycopiés. Le travail a été repris sous le nom de *Dialogues concernant deux sciences*. En voici des extraits :

> Nathanaël – Pour résoudre l'équation différentielle $y'^2 = \frac{a^2 - y^2}{y^2}$ (3.1) certains procèdent comme suit. Ils remarquent qu'elle est bien équivalente à $\frac{dy}{dx} = \pm \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y}$ (3.2)... Les variables se séparent, disent-ils, et l'on a $\frac{y\,dy}{\sqrt{a^2 - y^2}} = dx$. Donc $x = \int y(a^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}} dy.$ …
>
> Nathanaël –Quel sens faut-il donner à l'écriture $\frac{y\,dy}{\sqrt{a^2 - y^2}} = dx$? On semble multiplier par un *dx* qui pour moi est mystérieux.

Ce type de séparation n'est pas possible dans le cadre des EDO du second ordre. Il est en effet impossible de multiplier directement par $(dx)^2$ à cause du d^2y.

Lors d'interviews, nous avons constaté au sein de l'université de Mons une difficulté de communication entre mathématiciens et physiciens. Le mathématicien ne comprenait pas comment on ne parlait pas d'EDO lors des cours de dynamique.

Ainsi, au cours d'un exposé *La transposition didactique et son « triangle » : le pendule simple comme exemple* (séminaire Fondements et notions fondamentales, 2015), nous avons présenté une analyse d'approches différentes du pendule simple.

En dernière année du lycée est étudié le mouvement harmonique. La plupart des livres scolaires s'appuient sur l'idée d'établir une concordance entre trois types de mouvement (le mouvement circulaire uniforme (MCU), le mouvement rectiligne sinusoïdale (MRS), le mouvement harmonique) telle que présentée notamment dans le livre écrit par Hecht (1999). En s'appuyant sur les dérivées des fonctions trigonométriques, il est possible de caractériser le type de force engendrant un mouvement harmonique. Le lien entre le pendule simple (MRS) et le mouvement harmonique n'est pas prouvé de manière rigoureuse. Ils s'appuient sur une inférence inductive, par exemple, en observant la courbe décrite par une bouteille de sable percée en mouvement pendulaire sur une feuille défilant en MRU.

Pourquoi alors que les élèves connaissent la décomposition des forces et la loi de la mécanique de Newton n'y a-t-il aucun recours à l'EDO associée ?

Pour Benson, la situation est encore plus complexe. L'auteur tourne en rond. Il part du mouvement harmonique générale y(t) = A sin (ω t + φ), recherche la dérivée première et seconde pour comparer la position et l'accélération, obtenant ainsi l'EDO. Il affirme alors que l'élongation en est **une** solution. Sans prouver l'unicité, il part de l'observation du mouvement bloc-ressort affirmant que son élongation est sinusoïdale.

Il suffirait pourtant d'écrire la loi de Newton, d'utiliser la linéarisation et de rechercher une fonction dont la dérivée seconde est opposée à elle-même. L'unicité serait prouvée sur base de théorèmes de mathématiques rencontrés en fin de lycée. Il est dommage de ne pas renvoyer aux EDO par la loi de la mécanique au sein de certaines universités.

Notons également, qu'à l'UCL, les ingénieurs et les physiciens ne devront plus obligatoirement suivre un cours d'EDO. Pourtant de nombreuses modélisations, permettant des avancées significatives en physique et en compréhension de phénomènes physique, s'appuient sur les EDO et sur les EDP.

Au niveau universitaire, il serait également intéressant de s'interroger avec les étudiants sur l'erreur commise par la linéarisation du pendule simple. Dans de nombreux ouvrages, on retrouve un renvoi à une marge d'erreur sans la moindre explication. S'agit-il de l'erreur commise en comparant le sin(x) et x ou celle commise en comparant la solution de l'équation linéaire à celle non-linéaire?

CONCLUSION

Une réflexion sur l'utilisation de dx/dt comme un rapport et l'utilité d'un tel recours erroné n'est pas assez pris en compte dans l'enseignement ainsi que la problématique du dx, un infiniment petit. Il s'agit pourtant d'un obstacle épistémologique comme le décrivent Kac et Randolph (1942). En effet, les notations $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} = x'$ et $dx = x'\,dt$ ne renvoient pas au même cadre théorique, la dérivée ou la différentielle.

Par contre, le recours au rapport, dans un cadre algébrique défini, permet la résolution de problèmes en utilisant le concept de vitesse relative. Tandis que le recours à la fonction, dans un cadre analytique, permet la résolution de ceux-ci en utilisant le concept de vitesse instantanée. Nous obtenons une approche double des problèmes permettant à chaque élève de s'approprier une résolution adaptée à son esprit.

De même, cette double approche permet de s'adapter au parcours de l'élève en tenant compte de ses connaissances. Au lycée, il n'est pas possible d'avoir recours pour la recherche de la formule de l'accélération centripète à l'inférence déductive mais bien à l'inférence inductive s'appuyant sur des observations de phénomènes particuliers.

C'est pourquoi, nous nous sommes intéressés, comme le montre cet article, à l'étude comparée des approches de concepts, de problèmes et d'applications par des mathématiciens et des physiciens. Il est important que lors de leur formation, les futurs enseignants prennent connaissance d'approches différentes afin de les exploiter dans leur enseignement. A l'université Paris-Diderot, un dialogue entre différents professeurs des deux disciplines a été mis en place afin d'éviter des ambiguïtés lors des cours qui n'occasionnent que des difficultés supplémentaires pour les étudiants. Des séances communes ont été réalisées montrant la complémentarité des approches sur divers thèmes pour les étudiants. Malheureusement, cette tentative s'est avérée infructueuse concernant la séance sur la différentielle. En conclusion, nous sommes encore très loin d'être parvenu à retrouver une synergie didactiquement profitable.

GLOSSAIRE

Un **cadre** est constitué des objets d'une branche des mathématiques, des relations entre les objets, de leurs formulations éventuellement diverses et des images mentales associées à ces objets et ces relations. (Douady, 1992)
Le **cadre algébrique** renvoie aux objets suivants : les rapports dimensionnels ou adimensionnels de nombres représentés par des lettres (delta x, dx, a, v, ...) et les opérations algébriques associées.
Le **cadre analytique** renvoie aux objets suivants : les fonctions numériques et les opérations sur ces dernières.
Le **changement de cadres** est un moyen d'obtenir des formulations différentes d'un problème qui sans être tout à fait équivalentes, permettent un nouvel accès aux difficultés rencontrées et la mise en œuvre d'outils et de techniques qui ne s'imposaient pas dans la première formulation.

Une **fenêtre conceptuelle** est l'ensemble des objets, des outils et des relations mobilisés pour analyser l'énoncé du problème ou de la situation, ou pour développer une stratégie de résolution, quels que soient les cadres dont ils relèvent. (Douady, 1992)

Une **inférence** est une opération mentale qui consiste à sélectionner des composantes d'une entité complexe, à en retenir quelques-unes et à en négliger d'autres. Elle s'applique à la fois à un raisonnement inductif et à un raisonnement déductif. (Barth, 1987)
L'**inférence inductive** infère une règle à partir d'une information limitée, à partir de l'observation des faits particuliers, des exemples. On infère du général (théorique) à partir du particulier. Il s'agit d'hypothèses ou de conjectures à valider par la suite.
L'**inférence déductive** est la conclusion exacte à partir d'une vérité donnée. On infère du particulier à partir du général ou du théorique. L'inférence est nécessairement vraie.

L'**interdisciplinarité physico-mathématique** est un instrument curriculaire, pédagogique et didactique visant, au sein d'une des deux disciplines, mathématique ou physique, la construction et l'intégration de savoirs, l'appropriation de concepts et une modélisation du réel à partir de connaissances disciplinaires provenant de l'autre discipline. Elle implique une collaboration entre mathématiciens et physiciens.

RÉFÉRENCES

Barth, B.-M. (1987). *L'apprentissage de l'abstraction.* Retz

Benson, H. (1999 et 2009). *Physique I Mécanique*. Editions du Renouveau Pédagogique Inc. De Boeck Université.

Cauchy, A.-L. (1823). Résumé des leçons données à l'École royale polytechnique sur le calcul infinitésimal. Tome 1.

Douady, R. (1992). Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement. *Repères-IREM*, n°6, 134-158.

Feynman, R. (2014). *Le cours de physique de Feynman*. Paris : Dunod.

Hadamard, J. (1923). La notion de différentielle dans l'enseignement, *Scripta Univ. Ab. Bib., Hiero-solymitanarum,. Réimprimé dans la "Mathematical Gazette"* 19, no. 236 (1935), 341–342.

Hecht, E. (1999). *Physique*. De Boeck Université.

Kac, M., Randolph J.-F. (1942). Differentials. *The American Mathematical Monthly*, 49, 110-112.

Karam, R., and others (2015). Introduction of the Thematic Issue on the Interplay of Physics and Mathematics. *Science & Education*, *Springer*, *24*, *Issue 5-6*, 487-805.

Leibniz, G. W. : manuscrits de Leibniz sur : http://www.leibniz-edition.de/Baende/

Martinand, J.-L. (1986). *Connaître et transformer la matière.* Berne : Peter Lang.

Poincaré, H. (1904). Les définitions générales en mathématiques, *L'enseignement mathématique*, 6, 257-283.

Rapport GRECO (1989. *Procédures différentielles dans les enseignements de mathématiques et de physique au niveau du premier cycle universitaire.* IREM Paris 7 et LDPES.

Roland, M. (2015) : *Vitesse instantanée, notion mathématique ou physique ? Approche épistémologique et didactique de la question*. Article dans un ouvrage collectif. Épistémologie et didactique, à paraître.

Sensevy, G. (2011). *Le sens du savoir*. De Boeck.

Varignon, P. (1698). Règle générale pour toutes sortes de mouvements de vitesses quelconques, *Procès-verbaux, Académie royale des sciences du 13 novembre 1697 au 5 juillet 1698*, 298-305.

Varignon, P. (1707). Des mouvements. *Histoire de l'Académie royale des sciences*, 22-27 et 222-264.